

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

№1

Вычислить производную функции $f(x) = \frac{x^4}{4} + 3x^2 - 6$

Решение: $f'(x) = (\frac{x^4}{4})' + (3x^2)' - 6' = \frac{4x^3}{4} + 3 \cdot 2x - 0 = x^3 + 6x = x(x^2 + 6)$;

№2

Вычислить производную функции $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$

Решение: $S'_t = (v_0 t)'_t + \left(\frac{at^2}{2}\right)'_t = v_0 + \frac{a}{2} \cdot 2t = v_0 + at$; $v = v_0 + at$

№3

Вычислить производную функции $f(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$

Решение:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1 - \sqrt{x})'(1 + \sqrt{x}) - (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})'}{(1 + \sqrt{x})^2} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1 + \sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(1 - \sqrt{x})}{(1 + \sqrt{x})^2} = \\ &= \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}}{(1 + \sqrt{x})^2} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{(1 + \sqrt{x})^2} = -\frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2} \end{aligned}$$

№4

Вычислить производную функции $f(x) = \frac{7 \ln x}{e^x}$

Решение: $f'(x) = 7 \frac{(\ln x)' e^x - \ln x (e^x)'}{(e^x)^2} = 7 \frac{\frac{e^x}{x} - \ln x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{7(1 - x \ln x)}{e^x}$

№5

Вычислить производную функции $f(x) = x^2 \operatorname{ctg} x$

Решение: $f'(x) = (x^2)'_x \cdot \operatorname{ctg} x + (\operatorname{ctg} x)' \cdot x^2 = 2x \cdot \operatorname{ctg} x + \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)'_x = x(2 \operatorname{ctg} x - \frac{x}{\sin^2 x})$

№6

Вычислить производную функции $f(x) = \cos^3 2x$

Решение: $f'(x) = 3\cos^2 2x \cdot (\cos 2x)' = -3\cos^2 2x \cdot \sin 2x \cdot (2x)' = -6\cos^2 2x \cdot \sin 2x$

№7

Вычислить производную функции $f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$

Решение: $f'(x) = -2\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)' = 6\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$

№8

Вычислить производную функции $f(x) = \frac{e^{3x}}{\cos 2x}$

Решение:

$$f'(x) = \frac{\left(\left(e^{3x}\right)' \cos 2x\right) - (\cos 2x)' \cdot e^{3x}}{\cos^2 2x} = \frac{3 \cdot e^{3x} \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cdot e^{3x}}{\cos^2 2x} = \frac{e^{3x}(3\cos 2x + 2\sin 2x)}{\cos^2 2x}$$

№9

Вычислить производную второго порядка функции: $f(x) = 2e^{-x^2}$

Решение:

$$f'(x) = 2e^{-x^2} \cdot (-2x) = -4x \cdot e^{-x^2};$$

$$f''(x) = (-4x)' \cdot e^{-x^2} + \left(e^{-x^2}\right)' \cdot (-4x) = -4e^{-x^2} + e^{-x^2} \cdot 8x^2 = 4e^{-x^2}(2x^2 - 1)$$

№10

Вычислить производную второго порядка функции: $f(x) = 5\ln(2x-3)$

Решение:

$$f'(x) = \frac{5}{2x-3} (2x-3)' = \frac{5 \cdot 2}{2x-3} = \frac{10}{2x-3};$$

$$f''(x) = \left(\frac{10}{2x-3}\right)' = \frac{-10}{(2x-3)^2} (2x-3)' = -\frac{10 \cdot 2}{(2x-3)^2} = -\frac{20}{(2x-3)^2}$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

№11

Вычислить дифференциал функции $f(x) = \frac{e^{-3x}}{1-x^3}$

Решение:

$$df = f'(x)dx;$$

$$f'(x) = \frac{(e^{-3x})'(1-x^3) - (e^{-3x})(1-x^3)'}{(1-x^3)^2} = \frac{-3e^{-3x}(1-x^3) - 3e^{-3x}x^2}{(1-x^3)^2} = \frac{3e^{-3x}(x^3 + x^2 - 1)}{(1-x^3)^2};$$

$$df = \frac{3e^{-3x}(x^3 + x^2 - 1)}{(1-x^3)^2} dx$$

№12

Вычислить дифференциал функции $f(x) = x^2 \ln(1-x^2)$

Решение:

$$df = f'(x)dx;$$

$$f'(x) = \left[x^2 \ln(1-x^2) \right]' = 2x \cdot \ln(1-x^2) - \frac{2x^3}{1-x^2} = 2x \left(\ln(1-x^2) - \frac{x^2}{1-x^2} \right);$$

$$df = 2x \left(\ln(1-x^2) - \frac{x^2}{1-x^2} \right) dx$$

№13

Вычислить дифференциал функции $f(x) = \frac{e^{-3x}}{1-x^3}$

Решение:

$$df = f'(x)dx;$$

$$f'(x) = \left(\frac{e^{-3x}}{1-x^3} \right)' = \frac{(e^{-3x})'(1-x^3) - (e^{-3x})(1-x^3)'}{(1-x^3)^2} = \frac{-3e^{-3x}(1-x^3) - 3e^{-3x}x^2}{(1-x^3)^2} =$$

$$= \frac{3e^{-3x}(x^3 + x^2 - 1)}{(1-x^3)^2}; \quad df = \frac{3e^{-3x}(x^3 + x^2 - 1)}{(1-x^3)^2} dx;$$

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

№14

Вычислить частные производные первого порядка функции: $f(x,y) = x^y$

Решение:

$$f'_x(x,y) = yx^{y-1};$$

$$f'_y(x,y) = x^y \ln x$$

№15

Вычислить частные производные первого порядка функции: $f(x,y) = \arctg\left(\frac{x}{y}\right)$

Решение:

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{y^2}{y^2+x^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2+x^2};$$

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{y^2}{y^2+x^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2+x^2}.$$

№16

Вычислить частные производные второго порядка функции: $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$

Решение:

$$f'_x(x,y) = \frac{(x-y)'(x+y) - (x-y)(x+y)'}{(x+y)^2} = \frac{(x+y) - (x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2};$$

$$f'_y(x,y) = \frac{(x-y)'(x+y) - (x-y)(x+y)'}{(x+y)^2} = \frac{-(x+y) - (x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2};$$

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{-2 \cdot 2y}{(x+y)^3} = \frac{-4y}{(x+y)^3}; \quad f''_{yy}(x,y) = \frac{-2 \cdot (-2x)}{(x+y)^3} = \frac{4x}{(x+y)^3};$$

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{(2y)'(x+y)^2 - (2y)((x+y)^2)'}{(x+y)^4} = \frac{2(x+y)^2 - 4y(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x+y)^4} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3};$$

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{(-2x)'(x+y)^2 - (-2x)((x+y)^2)'}{(x+y)^4} = \frac{-2(x+y)^2 + 4x(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x+y)^4} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3};$$

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}.$$

№17

Найти полный дифференциал функции: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Решение:

$$f'_x(x, y) = \left[(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \right]'_x = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 + y^2)'_x = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$f'_y(x, y) = \left[(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \right]'_y = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 + y^2)'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$df = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot dy$$

№18

Найти полный дифференциал функции: $f(x, y) = \ln(xy)$

Решение:

$$f'_x(x, y) = (\ln(xy))'_x = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x};$$

$$f'_y(x, y) = (\ln(xy))'_y = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y};$$

$$df = \frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy$$