ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

№ 1

Найти общее и частное решения дифференциального уравнения.

$(x^2+4)y'-2xy=0 \quad при \;\; x=1,\; y=5$

Решение:

$\left(x^2+4\right)\dfrac{dy}{dx}=2xy; \quad \dfrac{dy}{y}=\dfrac{2x}{x^2+4}dx;$

$\int\dfrac{2x}{x^2+4}dx=\left|\begin{matrix}x^2+4=t\\ 2xdx=dt\end{matrix}\right|=\int\dfrac{dt}{t}=ln|t|+C=ln(x^2+4)+C$

$ln|y|=ln(x^2+4)+ln|C'|; \qquad ln|y|=ln|C'|(x^2+4); \Rightarrow \; y=C'(x^2+4)$

При $x=1$ и $y=5$ имеем: $5=C'(1^2+4);\; C'=1.$

Частное решение $y=x^2+4$.

№2

Найти общее и частное решения дифференциального уравнения.

$y'=y^2 \quad при \;\; x=1,\; y=1$

Решение:

$\dfrac{dy}{dx}=y^2; \quad \dfrac{dy}{y^2}=dx; \quad y^{-2}dy=dx; \quad \int y^{-2}dy=\int dx;$

$\dfrac{y^{-1}}{-1}=x+C; \quad \dfrac{1}{y}=-(x+C); \qquad y=-\dfrac{1}{x+C}.$

При $x=1$ и $y=1$ имеем: $1=-\dfrac{1}{x+C}; \quad C=-2,$

Частное решение $y=\dfrac{1}{2-x}$.

№3

Найти общее и частное решения дифференциального уравнения.

$(1+x^2)dy+ydx=0 \quad при \;\; x=1,\; y=1$

Решение:

$\left(1+x^2\right)dy=-ydx; \quad \dfrac{dy}{y}=-\dfrac{1}{1+x^2}dx; \;\; \int\dfrac{dy}{y}=-\int\dfrac{1}{1+x^2}dx;$

$ln|y|=-arctgx+C; \quad \Rightarrow \; y=e^{-\,arctgx+C}$

При $x=1$ и $y=1$ имеем: $1=e^{-\,arctg1+C};\; C=\dfrac{\pi}{4}$

Частное решение $y=e^{(\pi/4\,-\,arctgx)}$

№4

Найти общее и частное решения дифференциального уравнения.

$y' = \frac{y}{lny}$ *при* $x = 2, y = 1$

Решение:

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{lny};\quad \frac{lny}{y}dy = dx;\quad \int\frac{lny}{y}dy = \int dx;$

$$\int\frac{lny}{y}dy = \left|\begin{matrix} lny = t \\ \frac{dy}{y} = dt \end{matrix}\right| = \int tdt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{ln^2 y}{2} + C$$

$\frac{ln^2 y}{2} = x + C;\quad ln^2 y = 2(x + C)$

При $x = 2$ и $y = 1$ имеем: $ln^2 1 = 2(2 + C);\quad C = -2$

Частное решение $ln^2 y = 2(x - 2)$

№5

Найти общее и частное решения дифференциального уравнения.

$x\frac{dx}{dt} + t = 1$ *при* $t = 0, x = 2$

Решение:

$-xdx = (t - 1)dt;\quad -\int xdx = \int(t - 1)dt;\quad -\frac{x^2}{2} = \frac{(t - 1)^2}{2} + \frac{C}{2};$

$-x^2 = t^2 - 2t + 1 + C_1;\quad t^2 + x^2 - 2t = C_2;$

При $t = 0$ и $x = 2$ имеем: $0^2 + 2^2 - 0 = C_2;\quad C_2 = 4$

Частное решение $t^2 + x^2 - 2t = 4;$

№6

Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными $sinx\,cosy\,dx + cosx\,siny\,dy = 0$

Решение:

$-sinx\,cosy\,dx = cosx\,siny\,dy;$

$\frac{sinx\;dx}{cosx} = -\frac{siny\,dy}{cosy};\quad \int\frac{sinx\;dx}{cosx} = -\int\frac{siny\,dy}{cosy};\quad \int tgx\,dx = -\int tg\,y\,dy;$

$\int tgx\,dx = -ln|cos\,x| + lnC_1;\quad -\int tg\,y\,dy = ln|cos\,y| + lnC_2;$

$ln|cos\,y| + ln|cos\,x| = lnC;\quad cos\,y \cdot cos\,x = C$

№7

Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными $y' = y^2 cosx$

Решение:

$$\frac{dy}{dx}=y^2 cosx; \quad \frac{dy}{y^2}=cosxdx; \quad \int\frac{dy}{y^2}=\int cosxdx;$$

$$-\frac{1}{y}=sinx+C; \quad y=-\frac{1}{sinx+C}$$

№8

Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными $xydx+(x+1)dy=0$

Решение:

$$xydx=-(x+1)dy; \quad \frac{xdx}{x+1}=-\frac{dy}{y}; \quad \int\frac{xdx}{x+1}=-\int\frac{dy}{y};$$

$$\int\frac{xdx}{x+1}=x-ln(x+1)+lnC; \; -lny=x-ln(x+1)+lnC;;$$

$$lny=ln(x+1)-x+lnC; \quad lny=ln(x+1)C-x;$$

$$y=(x+1)C\cdot e^{-x}.$$

№9

Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными $(1+e^{2x})y^2dy=e^{2x}dx$

Решение:

$$y^2dy=\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})}dx; \quad \int y^2dy=\int\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})}dx;$$

$$\int\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})}dx=\begin{vmatrix}1+e^{2x}=t\\ 2e^{2x}=dt\end{vmatrix}=\int\frac{1}{2t}dt=\frac{1}{2}lnt+lnC=\frac{1}{2}ln\left(1+e^{2x}\right)+lnC;$$

$$\frac{y^3}{3}=\frac{1}{2}ln\left(1+e^{2x}\right)+lnC; \quad \frac{y^3}{3}=ln\sqrt{\left(1+e^{2x}\right)}+lnC; \quad y^3=3lnC\sqrt{\left(1+e^{2x}\right)}.$$

№10

Найти общее решение однородного дифференциального уравнения первого порядка $2xyy'=y^2-4x^2$

Решение:

$$2xy\frac{dy}{dx}=y^2-4x^2; \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y^2-4x^2}{2xy}; \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y^2}{x^2}-4}{2\cdot\frac{y}{x}};$$

Введем новую функцию:

$$u=\frac{y}{x};\quad \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(ux)=u+x\frac{du}{dx};$$

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2-4}{2u};\quad 2u^2+2ux\frac{du}{dx}=u^2-4;\quad u^2+4=-2ux\frac{du}{dx};$$

$$\frac{dx}{x}=-\frac{2u}{u^2+4}du;\quad \int\frac{dx}{x}=-2\int\frac{u}{u^2+4}du;\quad lnx+lnC=-2\cdot\frac{1}{2}ln(u^2+4);$$

$$lnx+lnC=-ln(u^2+4);\quad lnCx=ln(u^2+4)^{-1};$$

$$Cx=\frac{1}{u^2+4};\quad Cx=\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+4};\quad Cx=\frac{x^2}{y^2+4x^2};\quad y^2+4x^2=\frac{x}{C};\quad y^2+4x^2=C_1x$$

№11

Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка $y''=sinxcosx$

Решение:

$$y'=u(x);\quad y''=u'(x);\quad u'(x)=sinxcosx;$$

$$\frac{du}{dx}=sinxcosx;\quad du=sinxcosxdx;\quad \int du=\int sinxcosxdx;$$

$$\int sinxcosxdx=\begin{vmatrix} sinx=t \\ cosxdx=dt\end{vmatrix}=\int tdt=\frac{t^2}{2}+C_1=\frac{sin^2x}{2}+C_1;$$

$$u=\frac{sin^2x}{2}+C_1;\quad y'=\frac{sin^2x}{2}+C_1;\quad \frac{dy}{dx}=\frac{sin^2x}{2}+C_1;\quad dy=\left(\frac{sin^2x}{2}+C_1\right)dx;$$

$$\int dy=\int\left(\frac{sin^2x}{2}+C_1\right)dx;\quad \int\left(\frac{sin^2x}{2}+C_1\right)dx=-\frac{1}{4}sinxcosx+\frac{1}{4}x+C_1x+C_2;$$

$$y=-\frac{2}{8}sinxcosx+\frac{1}{4}x+C_1x+C_2;\quad y=-\frac{sin2x}{8}+\frac{1}{4}x+C_1x+C_2.$$

№12

Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка $xy''-y'=0$

Решение:

$$y'=u(x);\quad y''=u'(x);\quad xu'-u=0;\quad x\frac{du}{dx}=u;\quad \frac{du}{u}=\frac{dx}{x};\quad \int\frac{du}{u}=\int\frac{dx}{x};$$

$$lnu=lnx+lnC_1;\quad lnu=lnC_1x;\quad u=C_1x;$$

$$y'=C_1x;\quad \frac{dy}{dx}=C_1x;\quad dy=C_1xdx;\quad \int dy=\int C_1xdx;$$

$$y=C_1\frac{x^2}{2}+C_2;\quad y=Cx^2+C_2.$$

№13

Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка $(1-x^2)y''-xy'=0$

Решение:

$$y'=u(x);\quad y''=u'(x);\quad (1-x^2)u'-xu=0;\quad (1-x^2)\frac{du}{dx}=xu;\quad \frac{du}{u}=\frac{xdx}{(1-x^2)};$$

$$\int\frac{du}{u}=\int\frac{xdx}{(1-x^2)};\quad lnu=-\frac{1}{2}ln(1-x^2)+lnC_1;\quad lnu=ln(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+lnC_1;$$

$$lnu=ln(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot C_1;\quad u=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}C_1;\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}C_1;\quad dy=\frac{C_1dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\int dy=\int\frac{C_1dx}{\sqrt{1-x^2}};\quad y=C_1arcsinx+C_2.$$

№14

Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y''+y'+y=0$

Решение:

$$y''+y'+y=0;\quad k^2+k+1=0;\quad k_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-1}=\frac{1}{2}\pm i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$y=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

№15

Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y''-7y'+10y=0$

Решение:

$$y''-7y'+10y=0;\quad k^2-7k+10=0;\quad k_{1,2}=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}-10}=\frac{7}{2}\pm\frac{3}{2};$$

$$k_1=5;\quad k_2=2;$$

$$y=C_1e^{5x}+C_2e^{2x}.$$

№16

Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y''-y=0$

Решение:

$y'' - y = 0; \quad k^2 - 1 = 0; \quad k_{1,2} = \pm 1;$

$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x};$

№17

Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' - 7y' + 10y = 0 \quad при \quad x = 0,\ y = 0,\ y' = 1.$

Решение:

$y'' - 7y' + 10y = 0; \quad k^2 - 7k + 10 = 0; \quad k_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2};$

$k_1 = 5; \quad k_2 = 2;$

$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{2x}.$

$y' = 5C_1 e^{5x} + 2C_2 e^{2x}.$

При $x = 0, y = 0$ и $y' = 1$ имеем:

$\begin{cases} 0 = C_1 e^0 + C_2 e^0 \\ 1 = 5C_1 e^0 + 2C_2 e^0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ 1 = 5C_1 + 2C_2 \end{cases};$

$C_1 = \frac{1}{3}; \quad C_2 = -\frac{1}{3}$

Частное решение $y = \frac{\left(e^{5x} - e^{2x}\right)}{3}.$