

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

№1

В семье трое детей. Считая рождение мальчика и девочки равновероятными событиями, найти вероятность того, что в семье три мальчика.

Решение:

Так как рождение мальчика и девочки равновероятные события, то

$$P(M) = P(D) = \frac{1}{2}$$

Вероятность того, что в семье три мальчика

$$P(MMM) = P(M) \cdot P(M) \cdot P(M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0,125.$$

№2

Три врача независимо друг от друга осмотрели одного и того же больного. Вероятность того, что первый врач допустит ошибку при установлении диагноза, равна 0,01. Для второго и третьего врачей эта вероятность соответственно 0,015 и 0,02. Найти вероятность того, что при осмотре больного хотя бы один из врачей допустит ошибку в диагнозе.

Решение:

Вероятность того, что врачи не допустят ошибку

$$q_1 = 0,99; \quad q_2 = 0,985; \quad q_3 = 0,98.$$

Полная система событий состоит в следующем: могут допустить ошибку 3, 2, 1, 0 врачей. Сумма вероятностей этих событий равна единице

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_0 = 1$$

Вероятность того, что врачи не допустят ошибку равна

$$p_0 = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0,99 \cdot 0,985 \cdot 0,98 = 0,956$$

Вероятность того, что хотя бы один из врачей допустит ошибку в диагнозе

$$p = 1 - p_0 = 1 - 0,956 = 0,044.$$

№3

В группе из 30 студентов на контрольной работе оценку «отлично» получили 8 человек, «хорошо» – 12, «удовлетворительно» – 8. Какова вероятность того, что три студента, вызванных к доске, имеют по контрольной работе оценку «хорошо»?

Решение:

Вероятность того, что вызванный студент получил оценку «хорошо»

$$P = \frac{m}{n} = \frac{12}{30} = 0,4$$

Вероятность того, что три студента, вызванных к доске, имеют по контрольной работе оценку «хорошо»

$$P = 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,064.$$

№4

Три врача независимо друг от друга осмотрели одного и того же больного. Вероятность того, что первый врач допустит ошибку при установлении диагноза, равна 0,01. Для второго и третьего врачей эта вероятность соответственно 0,015 и 0,02. Найти вероятность того, что при осмотре больного хотя бы один из врачей допустит ошибку в диагнозе.

Решение:

Вероятность того, что врачи не допустят ошибку

$$q_1 = 0,99; \quad q_2 = 0,985; \quad q_3 = 0,98.$$

Полная система событий состоит в следующем: могут допустить ошибку 3, 2, 1, 0 врачей. Сумма вероятностей этих событий равна единице

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_0 = 1$$

Вероятность того, что врачи не допустят ошибку равна

$$p_0 = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0,99 \cdot 0,985 \cdot 0,98 = 0,956$$

Вероятность того, что хотя бы один из врачей допустит ошибку в диагнозе

$$p = 1 - p_0 = 1 - 0,956 = 0,044.$$

№5

Всхожесть партии семян некоторого растения составляет 90 %. Определить вероятность того, что из 5 посеянных семян взойдут 4.

Решение:

Вероятность того, что семена не взойдут равна

$$q = 1 - p = 1 - 0,9 = 0,1$$

По формуле Бернулли

$$P_5(4) = C_5^4 p^4 q^1 = \frac{5!}{4!(5-4)!} \cdot 0,9^4 \cdot 0,1^1 = 0,33.$$

№6

Завод отправил на аптечный склад 5000 термометров. Вероятность повреждений каждого термометра в пути равна 0,0002. Какова вероятность того, что на аптечный склад прибудет ровно 3 поврежденных термометра?

Решение:

По условию $n=5000$, $p=0,0002$, $m=3$. Параметр $\mu = np = 5000 \cdot 0,0002 = 1$

По формуле Пуассона

$$P_n(m) \cong \frac{\mu^m}{m!} \cdot e^{-\mu}; \quad P_{5000}(3) \cong \frac{1^3}{3!} \cdot e^{-1} = 0,06$$

№7

Если в среднем левши составляют 1 %, какова вероятность того, что среди 200 человек: 1) ровно 4 левши; 2) по крайней мере 4 левши?

Решение:

1) По условию $n=200$, $p=0,01$, $m=4$. Параметр $\mu=np=200 \cdot 0,01=2$

По формуле Пуассона

$$P_n(m) \cong \frac{\mu^m}{m!} \cdot e^{-\mu}; \quad P_{200}(4) \cong \frac{2^4}{4!} \cdot e^{-2} = 0,09$$

2) Вероятность того, что среди 200 человек по крайней мере 4 левши

$$P(m \geq 4) = 1 - P(m < 4)$$

$$P(m < 4) = P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2) + P_{200}(3);$$

$$P_{200}(0) \cong e^{-2} = 0,135; \quad P_{200}(1) \cong \frac{2^1}{1!} \cdot e^{-2} = 0,27;$$

$$P_{200}(2) \cong \frac{2^2}{2!} \cdot e^{-2} = 0,27; \quad P_{200}(3) \cong \frac{2^3}{3!} \cdot e^{-2} = 0,18;$$

Искомая вероятность

$$P(m \geq 4) = 1 - (0,135 + 0,27 + 0,27 + 0,18) = 0,15.$$