СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

№1

Предполагая одинаковыми вероятности рождения мальчика и девочки, установить закон распределения случайной величины X, которая выражает число мальчиков в семье, имеющей пять детей.

Решение:

Пусть X – количество мальчиков в семье. Величина X может принимать значения 0,1,2,3,4,5. Найдем вероятности этих значений по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m};$$

$$P_5(0) = 0{,}5^5 = 0{,}03125; \qquad P_5(1) = \frac{5!}{4!\,1!} \cdot 0{,}5^4 \cdot 0{,}5^1 = 0{,}15625;$$

$$P_5(2) = \frac{5!}{3!\,2!} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}3125; \qquad P_5(3) = \frac{5!}{2!\,3!} \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^3 = 0{,}3125;$$

$$P_5(4) = \frac{5!}{1!\,4!} \cdot 0{,}5^1 \cdot 0{,}5^4 = 0{,}15625; \qquad P_5(5) = 0{,}5^5 = 0{,}03125;$$

Закон распределения имеет вид:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,03125	0,15625	0,3125	0,3125	0,15625	0,03125

Контроль: $0{,}03125 + 0{,}15625 + 0{,}3125 + 0{,}3125 + 0{,}15625 + 0{,}03125 = 1$

№2

Закон распределения случайной величины X задан следующей таблицей:

X	0	1	2	3	4
P	0,13	0,35	0,35	0,15	0,02

Вычислить ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение:

Сначала находим математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}13 + 1 \cdot 0{,}35 + 2 \cdot 0{,}35 + 3 \cdot 0{,}15 + 4 \cdot 0{,}02 = 1{,}58.$$

Далее запишем закон распределения X^2:

X^2	0	1	4	9	16
P	0,13	0,35	0,35	0,15	0,02

Математическое ожидание случайной величины X^2:

$$M\left(X^2\right) = 0 \cdot 0{,}13 + 1 \cdot 0{,}35 + 4 \cdot 0{,}35 + 9 \cdot 0{,}15 + 16 \cdot 0{,}02 = 3{,}42$$

Находим дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 3{,}42 - 1{,}58^2 = 0{,}92 .$$

Отсюда находим среднеквадратическое отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}92} \approx 0{,}96 .$$

№3

Известно, что для человека pH крови является случайной величиной, имеющей нормальное распределение с математическим ожиданием μ=7,4 и средним квадратическим отклонением σ =0,2. Найти вероятность того, что уровень pH находится между 7,35 и 7,45.

Решение:

Вероятность того, что X примет значение из интервала $\alpha < X < \beta$, имеет вид:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2} dx$ – функция Лапласа.

$$P(7{,}35 < X < 7{,}45) = \Phi\left(\frac{7{,}45 - 7{,}4}{0{,}2}\right) - \Phi\left(\frac{7{,}35 - 7{,}4}{0{,}2}\right) = \Phi(0{,}25) - \Phi(-0{,}25) =$$
$$= \Phi(0{,}25) + \Phi(0{,}25) = 2\Phi(0{,}25) .$$

По таблице находим: $\Phi(0{,}25) = 0{,}0987$, следовательно:

$$P(7{,}35 < X < 7{,}45) = 2 \cdot 0{,}0987 = 0{,}1974 .$$

№4

Плотность вероятности случайной величины X задана выражением $f(x) = ae^{-\frac{(x-5)^2}{8}}$. Найти коэффициент a и определить вероятность того, что в результате опыта случайная величина X отклонится от своего математического ожидания не более чем на 1,5.

Решение:

Запишем вначале закон распределения. Общая формула имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} .$$

Сравним закон распределения с его общим видом:

$$f(x) = ae^{-\frac{(x-5)^2}{8}} \qquad\qquad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}.$$

Следовательно $\sigma = 2; \quad \mu = 5; \quad a = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}$.

Вероятность того, что в результате опыта случайная величина X отклонится от своего математического ожидания не более чем на 1,5 равна

$$P(|X-\mu| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right);$$

$$P(|X-5| < 1{,}5) = 2\Phi\left(\frac{1{,}5}{2}\right) = 2\Phi(0{,}75) = 2 \cdot 0{,}2734 = 0{,}5468.$$