

## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

### №1

В результате десяти измерений диаметра капилляра в стенке легочных альвеол были получены следующие данные: 2,83; 2,82; 2,81; 2,85; 2,78; 2,86; 2,83; 2,85; 2,83; 2,84 мкм. Вычислить оценку истинной величины диаметра капилляра, абсолютную и относительную погрешности при доверительной вероятности  $\gamma=0,95$ .

Решение:

Находим среднее арифметическое значение:

$$\bar{x} = \frac{2,83 + 2,82 + 2,81 + 2,85 + 2,78 + 2,86 + 2,83 + 2,85 + 2,83 + 2,84}{10} = 2,83 \text{ (мкм)}$$

Находим среднюю квадратическую ошибку отдельного измерения:

$$S = \sqrt{\frac{(2,83 - 2,83)^2 + (2,82 - 2,83)^2 + \dots + (2,84 - 2,83)^2}{9}} = 0,023 \text{ (мкм)}$$

Определяем наибольшую возможную ошибку отдельного измерения:

$$S_{\text{наиб}} = 3S \text{ , } S_{\text{наиб}} = 3 \cdot 0,023 = 0,069 \text{ (мкм)}$$

В приведенном примере отсутствуют измерения, отличающиеся от  $x$  больше, чем на  $0,069$  мкм, поэтому все они будут участвовать в последующих расчетах.

Определяем среднюю квадратическую ошибку среднего арифметического:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{0,023}{\sqrt{10}} = 0,007$$

Определяем точность измерения (абсолютную погрешность среднего арифметического).

$$\Delta x = t_{\alpha, n} \cdot S_{\bar{x}}; \quad \alpha = 0,95; \quad n = 10$$

Коэффициент Стьюдента находим по таблице

$$\Delta x = 2,23 \cdot 0,007 = 0,015; \quad t_{\alpha, n} = t_{0,95, 10} = 2,228 \approx 2,23$$

Таким образом, диаметр капилляра с учетом только случайной ошибки может быть записан следующим образом:  $\bar{x} = (2,83 \pm 0,01) \text{ мкм}$

Доверительный интервал  $\bar{x}$  заключается в пределах  $2,83 - 0,01 \leq \bar{x} \leq 2,82 + 0,01$

Это значит, что с вероятностью  $0,95$  истинное значение измеряемой величины не выйдет за пределы интервала:  $2,82$  и  $2,84$

Определяем относительную ошибку которая не должна превышать 5%:

$$\varepsilon = \frac{0,01}{2,83} \cdot 100\% = 0,3\%$$

### №2

С помощью вискозиметра проведено измерение коэффициента вязкости спирта. Расчетная формула имеет вид:

$$\eta = \eta_0 \frac{\rho t}{\rho_0 t_0},$$

где  $\eta$ ,  $\rho$ , и  $t$  – вязкость, плотность и время истечения спирта из капилляра вискозиметра;  $\eta_0$ ,  $\rho_0$ , и  $t_0$  – вязкость, плотность и время истечения воды ( $\eta_0=0,01$  П;  $\rho_0=998,2$  кг/м<sup>3</sup>;  $\rho=790,1$  кг/м<sup>3</sup> – принять за точные числа). В пяти опытах получены следующие результаты:

$t$ , сек	80	79	81	83	78
$t_0$ , сек	48	50	47	51	46

Оценить истинное значение коэффициента вязкости с доверительной вероятностью  $\alpha=0,95$ . Оценить абсолютную и относительную погрешность измерения.

Решение:

Определим выборочные характеристики:

а) средние значения непосредственно измеренных величин  $t$  и  $t_0$ :

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} = \frac{80 + 79 + 81 + 83 + 78}{5} = 80,2 \text{ (сек)};$$

$$\bar{t}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n t_{0i}}{n} = \frac{48 + 50 + 47 + 51 + 46}{5} = 48,4 \text{ (сек)}$$

б) оценки среднего квадратического отклонения среднего непосредственно измеренных величин:

$$S_t = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2},$$

$$S_t = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 4} [(80 - 80,2)^2 + (79 - 80,2)^2 + (81 - 80,2)^2 + (83 - 80,2)^2 + (78 - 80,2)^2]} = 0,86$$

$$S_{t_0} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (t_{0i} - \bar{t}_0)^2},$$

$$S_{t_0} = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 4} [(48 - 48,4)^2 + (50 - 48,4)^2 + (47 - 48,4)^2 + (51 - 48,4)^2 + (46 - 48,4)^2]} = 0,93$$

Среднее значение коэффициента вязкости:

$$\bar{\eta} = \eta_0 \frac{\bar{\rho} \bar{t}}{\rho_0 \bar{t}_0}, \quad \bar{\eta} = 0,01 \cdot \frac{790,1 \cdot 80,2}{998,2 \cdot 48,4} = 0,01 \text{ (П)}$$

Оценка среднего квадратического отклонения среднего значения коэффициента вязкости:

$$S_{\bar{\eta}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} S_t\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t_0} S_{t_0}\right)^2};$$

определим частные производные:

$$\eta = \eta_0 \frac{\rho t}{\rho_0 t_0}, \text{ таким образом:}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\eta_0 \rho}{\rho_0 t_0} = \frac{0,01 \cdot 709,1}{998,2 \cdot 48,4} = 0,0001$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t_0} = -\frac{\eta_0 \rho t}{\rho_0 t_0^2} = -\frac{0,01 \cdot 709,1 \cdot 80,2}{998,2 \cdot 48,4^2} = -0,0002$$

$$S_{\bar{\eta}} = \sqrt{(0,0001 \cdot 0,86)^2 + (-0,0002 \cdot 0,93)^2} = 0,0002$$

Находим значение коэффициента Стьюдента:

$$t_{0,95}(4) = 2,78$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta \eta = S_{\bar{\eta}} \cdot t_{\alpha}(f) = 0,0002 \cdot 2,78 = 0,0005 \text{ (II)}$$

Истинное значение коэффициента вязкости:

$$\eta = (0,01 \pm 0,0005) \text{ (II)}$$

Доверительный интервал:

$$0,01 - 0,0005 \leq \eta \leq 0,01 + 0,0005$$

$$0,0095 \leq \eta \leq 0,0105$$

Относительная погрешность:

$$\delta_{\eta} = \frac{\Delta \eta}{\eta} = \frac{0,0005}{0,01} = 0,05 = 5\%$$

### №3

Класс точности миллиампера  $K=1\%$ ,  $I_{\text{ток}}=100 \text{ mA}$ . Прибором измерили три значения тока  $I_1=80 \text{ mA}$ ;  $I_2=50 \text{ mA}$ ;  $I_3=25 \text{ mA}$ . Определить относительные ошибки измерений.

$$E = K \frac{I_H}{I}; \quad E_1=1,25\%; \quad E_2=2\%; \quad E_3=4\%$$

### №4

При подсчете количества листьев у одного из лекарственных растений были получены следующие данные: 8, 10, 7, 9, 11, 6, 9, 8, 10, 7. Вычислить

выборочную среднюю и оценку среднего квадратического отклонения выборочной средней.

Решение:

$$\bar{x}_e = \frac{8+10+7+9+11+6+9+8+10+7}{10} = 8,5$$

$$S_{x_e} = \sqrt{\frac{2 \cdot (8-8,5)^2 + 2 \cdot (10-8,5)^2 + 2 \cdot (7-8,5)^2 + 2 \cdot (9-8,5)^2 + (11-8,5)^2 + (6-8,5)^2}{10 \cdot (10-1)}} = 0,5$$

### №5

При измерении некоторой величины  $X$  получены следующие результаты: 10,9; 10,7; 11,0; 10,5; 10,6; 10,4; 11,3; 10,8; 11,2; 10,9; 10,8; 10,3; 10,5; 10,9; 10,9; 10,6; 11,3; 10,8; 10,9; 10,7. Вычислить точечную и интервальную оценки для величины  $X$  с доверительной вероятностью  $\gamma = 0,95$ .

Решение:

$$\bar{x}_e = \frac{10,9 \cdot 5 + 10,7 \cdot 2 + 11 + 10,5 \cdot 2 + 10,6 \cdot 2 + 10,4 + 11,3 \cdot 2 + 10,8 \cdot 3 + 11,2 + 10,3}{20} = 10,8$$

$$S_{x_e} = \sqrt{\frac{1}{20 \cdot 19} \left[ 5(10,9 - 10,8)^2 + 2(10,7 - 10,8)^2 + 2(10,5 - 10,8)^2 + 2(10,6 - 10,8)^2 + (11 - 10,8)^2 + (10,4 - 10,8)^2 + 2(11,3 - 10,8)^2 + 3(10,8 - 10,8)^2 + (11,2 - 10,8)^2 + (10,3 - 10,8)^2 \right]} = 0,06$$

$$t_{0,95}(20) = 2,093; \quad \Delta x = 0,06 \cdot 2,093 = 0,125$$

$$10,8 - 0,125 < \bar{x} < 10,8 + 0,125$$

$$10,675 < x < 10,925$$

### №6

При измерении электрического сопротивления  $R_i$  катушки получены следующие результаты: 6,270 Ом; 6,273; 6,277; 6,271; 6,276; 6,272; 6,278; 6,275; 6,277; 6,274 Ом. Определить абсолютную погрешность сопротивления при доверительной вероятности  $\gamma = 0,95$ .

Решение:

Определим выборочные характеристики:

а) среднее значение непосредственно измеренной величины:

$$\bar{R} = \frac{6,270 + 6,273 + 6,277 + 6,271 + 6,276 + 6,272 + 6,278 + 6,275 + 6,277 + 6,274}{10} = 6,274 \text{ (Ом)}$$

б) оценку среднего квадратического отклонения среднего непосредственно измеренной величины:

$$S_{\bar{R}} = \sqrt{\frac{1}{10-1} \left[ (6,270 - 6,274)^2 + (6,273 - 6,274)^2 + (6,277 - 6,274)^2 + (6,271 - 6,274)^2 + (6,276 - 6,274)^2 + (6,272 - 6,274)^2 + (6,278 - 6,274)^2 + (6,275 - 6,274)^2 + (6,277 - 6,274)^2 + (6,274 - 6,274)^2 \right]} = 0,0008$$

Находим значение коэффициента Стьюдента:

$$t_{0,95}(10) = 2,262$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta \bar{R} = S_{\bar{R}} \cdot t_{\alpha}(f) = 0,0008 \cdot 2,262 = 0,002 \text{ (Ом)}$$

### №7

В результате десяти одинаковых проб были получены следующие значения содержания марганца: 0,69%; 0,70; 0,67; 0,66; 0,67; 0,68; 0,67; 0,69; 0,68; 0,68%. Вычислить оценку истинного содержания марганца и абсолютную и относительную погрешности при доверительной вероятности  $\gamma = 0,95$ .

Решение:

Определим выборочные характеристики:

а) среднее значение непосредственно измеренной величины:

$$\bar{x} = \frac{0,69 + 0,70 + 0,67 + 0,66 + 0,67 + 0,68 + 0,67 + 0,69 + 0,68 + 0,68}{10} = 0,68 \%$$

б) оценку среднего квадратического отклонения среднего непосредственно измеренной величины:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{10-9} \left[ (0,69 - 0,68)^2 + (0,70 - 0,68)^2 + (0,67 - 0,68)^2 + (0,66 - 0,68)^2 + (0,67 - 0,68)^2 + (0,68 - 0,68)^2 + (0,67 - 0,68)^2 + (0,69 - 0,68)^2 + (0,68 - 0,68)^2 + (0,68 - 0,68)^2 \right]} = 0,004$$

Находим значение коэффициента Стьюдента:

$$t_{0,95}(10) = 2,262$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta \bar{x} = S_x \cdot t_{\alpha}(f) = 0,004 \cdot 2,262 = 0,01 (\%)$$

Относительная погрешность:

$$\delta_x = \frac{\Delta \bar{x}}{\bar{x}} = \frac{0,01}{0,68} = 0,014 = 1,4\%$$

Истинное значение содержания марганца:

$$x = (0,68 \pm 0,01) \%$$