ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

№1

Для проверки эффективности нового лекарства против гриппа были отобраны две группы больных по 15 человек. При применении старого лекарства средний срок выздоровления составлял 11 дней с выборочной дисперсией $S_1^2 = 3$, при применении нового – срок выздоровления 8 дней с $S_2^2 = 4$. При уровне значимости $p = 0{,}05$ проверить гипотезу о преимуществе нового лекарства.

Решение:

Найдем экспериментальное значение по формуле:

$$t_{эксп} = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

$$t_{эксп} = \frac{11 - 8}{\sqrt{(15-1)\cdot 3 + (15-1)\cdot 4}} \cdot \sqrt{\frac{15\cdot 15(15+15-2)}{15+15}} = 4{,}39$$

Найдем критическое значение:

$$t_{кр}\ (p, n_1 + n_2 - 2) = t_{кр}\ (0{,}01; 28) = 2{,}76\,;$$

$|t_{эксп}| > t_{кр}$, следовательно, значимых отличий у препаратов нет.

№2

По выборке объемом $n_1 = 40$ найдена средняя масса $\overline{M_1} = 0{,}500\,г$ таблеток, взятых из первой партии; по выборке объемом $n_2 = 50$ найдена средняя масса $\overline{M_2} = 0{,}505\,г$ таблеток, взятых из второй партии. Оценки дисперсий $S_1^2 = 2{,}5\cdot 10^{-5}$ и $S_2^2 = 3{,}6\cdot 10^{-5}$. При уровне значимости $p = 0{,}05$ выяснить, можно ли считать различие в средних значениях масс таблеток случайным.

Решение:

Найдем экспериментальное значение по формуле:

$$Z_{эксп} = \frac{\overline{M_1} - \overline{M_2}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{0{,}500 - 0{,}505}{\sqrt{\frac{2{,}5\cdot 10^{-5}}{40} + \frac{3{,}6\cdot 10^{-5}}{50}}} = -4{,}3$$

Найдем критическое значение:

$$\Phi(Z_{кр}) = \frac{1-p}{2} = \frac{1-0{,}05}{2} = 0{,}475\,;\quad Z_{кр} = 1{,}96$$

$|Z_{эксп}| > Z_{кр}$, следовательно, различие в средних значениях масс таблеток случайными считать нельзя.

№3

Средняя продолжительность госпитализации 36 больных пиелонефритом, получивших правильное, соответствующее официальным рекомендациям лечение, составила 4,51 суток, а 36 больных, получивших неправильное лечение, – 6,28 суток. Средние квадратические отклонения для этих групп – 1,98 суток и 2,54 суток соответственно. При уровне значимости $p = 0{,}05$ определить, значимо ли различие в сроках госпитализации? Другими словами, способствует ли соблюдение официальных схем лечения сокращению госпитализации?

Решение:

Найдем экспериментальное значение по формуле:

$$Z_{эксп} = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{4,51 - 6,28}{\sqrt{\frac{1,98^2}{36} + \frac{2,54^2}{36}}} = -3,3$$

Найдем критическое значение:

$$\Phi(Z_{кр}) = \frac{1-p}{2} = \frac{1-0,05}{2} = 0,475; \quad Z_{кр} = 1,96$$

$|Z_{эксп}| > Z_{кр}$, следовательно, различие в сроках госпитализации значимо.

№4

Были исследованы две независимые выборки объемом 60 больных каждая, перенесших операцию на сердце. Использовались два способа анестезии. У больных первой выборки (первый способ анестезии) минимальное среднее динамическое давление составило $\overline{x_1} = 66,9$ *мм рт. ст.,* а среднее квадратическое отклонение $- S_1 = 12,2$ *мм рт. ст.* У больных второй группы (в качестве наркоза использовался другой препарат) $\overline{x_2} = 73,2$ *мм рт. ст.*, а $S_2 = 14,4$ *мм рт. ст.* При уровне значимости $p = 0,05$ определить, действительно ли препарат №1 в большей степени снижает артериальное давление?

Решение:

Найдем экспериментальное значение по формуле:

$$Z_{эксп} = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{66,9 - 73,2}{\sqrt{\frac{12,2^2}{60} + \frac{14,4^2}{60}}} = -2,58$$

Найдем критическое значение:

$$\Phi(Z_{кр}) = \frac{1-p}{2} = \frac{1-0,05}{2} = 0,475; \quad Z_{кр} = 1,96$$

$|Z_{эксп}| > Z_{кр}$, следовательно, значимых отличий у препаратов нет.

№5

Для проверки эффективности нового лекарственного препарата А отобраны две группы больных. Одна группа ($n_1 = 50$ человек) контрольная, которая получала плацебо, а вторая группа ($n_2 = 70$ человек) получала препарат А. Среднее значение некоторого гемодинамического показателя составило $\overline{x_1} = 78,5$ в первой группе и $\overline{x_2} = 85$ – во второй. Средние квадратические отклонения в группах равны соответственно $S_1^2 = 10$ и $S_2^2 = 8,6$. При уровне значимости $p = 0,05$ выяснить, действительно ли препарат эффективен?

Решение:

Найдем экспериментальное значение по формуле:

$$Z_{эксп} = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{78{,}5 - 85}{\sqrt{\frac{10^2}{50} + \frac{8{,}6^2}{70}}} = -3{,}71$$

Найдем критическое значение:

$$\Phi(Z_{кр}) = \frac{1-p}{2} = \frac{1-0{,}05}{2} = 0{,}475\,; \; Z_{кр} = 1{,}96$$

$|Z_{эксп}| > Z_{кр}$, следовательно, различие между средними значимо.

№6

По двум независимым выборкам объемов $n_1 = 12$ и $n_2 = 15$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X_1 и X_2, найдены исправленные выборочные дисперсии $S_{x_1}{}^2 = 11{,}41$ и $S_{x_2}{}^2 = 6{,}52$. При уровне значимости $p = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий $H_0 : \sigma_{x_1}{}^2 = \sigma_{x_2}{}^2$.

Решение:

$H_0 : \sigma_{x_1}{}^2 = \sigma_{x_2}{}^2$ – нулевая гипотеза,

$H_1 : \sigma_{x_1}{}^2 > \sigma_{x_2}{}^2$ – конкурирующая гипотеза.

Вычислим экспериментальное значение критерия, определяемое как отношение большей из оценок дисперсий к меньшей:

$$F_{эксп} = \frac{S_{x_1}^2}{S_{x_2}^2} = \frac{11{,}41}{6{,}52} = 1{,}75$$

По таблице критических значений распределений Фишера-Снедекора при уровне значимости *p,* определим критическое значение $F_{кр}(p, f_1, f_2)$. Таким образом:

$$F_{кр}(p, f_1, f_2) = F_{кр}(0{,}05;11{,}14) = 2{,}57\,.$$

Так как $F_{эксп} < F_{кр}$, то различие оценок дисперсий не является значимым (нулевую гипотезу принимаем).

№7

По двум независимым малым выборкам объемов $n_1 = 5$ и $n_2 = 6$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X_1 и X_2*,* найдены выборочные средние $\overline{x_1} = 8{,}3$*,* $\overline{x_2} = 7{,}48$ и выборочные дисперсии $S_{x_1}{}^2 = 0{,}25$ и $S_{x_2}{}^2 = 0{,}108$. При уровне значимости $p = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу $H_0 : M(X_1) = M(X_2)$

Решение:

Вычислим экспериментальное значение критерия, определяемое как отношение большей из оценок дисперсий к меньшей:

$$F_{эксп} = \frac{S_{x_1}^2}{S_{x_2}^2} = \frac{0,25}{0,108} = 2,31$$

По таблице критических значений распределений Фишера-Снедекора определим критическое значение $F_{кр}(p, f_1, f_2)$:

$$F_{кр}(p, f_1, f_2) = F_{кр}(0,05;4,5) = 5,19.$$

Так как $F_{эксп} < F_{кр}$, то различие оценок дисперсий не является значимым (нулевую гипотезу принимаем). Теперь можно сравнить средние.

Найдем экспериментальное значение по формуле:

$$t_{эксп} = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{(n_1-1)S_{x_1}^2 + (n_2-1)S_{x_2}^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}$$

$$t_{эксп} = \frac{8,3-7,48}{\sqrt{(5-1)\cdot 0,25 + (6-1)\cdot 0,108}} \cdot \sqrt{\frac{5\cdot 6(5+6-2)}{5+6}} = 3,27$$

Найдем критическое значение:

$$t_{кр}\ (p, n_1+n_2-2) = t_{кр}\ (0,05;9) = 2,26;$$

$|t_{эксп}| > t_{кр}$, следовательно, генеральные средние различаются значимо.

№8

При анализе препарата дифференциальным методом по двум независимым выборкам объемов $n_1 = 11$ и $n_2 = 14$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X_1 и X_2, получены исправленные выборочные дисперсии $S_{x_1}{}^2 = 0,76$ и $S_{x_2}{}^2 = 0,38$. При уровне значимости $p = 0,05$ проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий.

Решение:

Вычислим экспериментальное значение критерия, определяемое как отношение большей из оценок дисперсий к меньшей:

$$F_{эксп} = \frac{S_{x_1}^2}{S_{x_2}^2} = \frac{0,76}{0,38} = 2$$

По таблице критических значений распределений Фишера-Снедекора при уровне значимости *p,* определим критическое значение $F_{кр}(p, f_1, f_2)$. Таким образом:

$$F_{кр}(p, f_1, f_2) = F_{кр}(0,05;10,13) = 2,67.$$

Так как $F_{эксп} < F_{кр}$, то различие оценок дисперсий не является значимым (нулевую гипотезу принимаем).

№9

По двум независимым выборкам, объемы которых $n_1 = 14$ и $n_2 = 10$, извлеченных из нормальных генеральных совокупностей X_1 и X_2, найдены исправленные выборочные дисперсии летальных доз двух препаратов $S_{x_1}{}^2 = 0,84$ и

${S_{x_2}}^2 = 2{,}52$. При уровне значимости $p = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий $H_0 : {\sigma_{x_1}}^2 = {\sigma_{x_2}}^2$, при конкурирующей гипотезе: $H_1 : {\sigma_{x_1}}^2 \neq {\sigma_{x_2}}^2$.

Решение:

Вычислим экспериментальное значение критерия, определяемое как отношение большей из оценок дисперсий к меньшей:

$$F_{эксп} = \frac{S_{x_2}^2}{S_{x_1}^2} = \frac{2{,}52}{0{,}84} = 3$$

По таблице критических значений распределений Фишера-Снедекора при уровне значимости *p,* определим критическое значение $F_{кр}(p, f_1, f_2)$. Таким образом:

$$F_{кр}(p, f_1, f_2) = F_{кр}(0{,}05;13{,}9) = 2{,}99\,.$$

Так как $F_{эксп} > F_{кр}$, то различие оценок дисперсий является значимым (нулевую гипотезу отвергаем).

№10

При анализе вещества двумя способами по двум независимым выборкам объемов $n_1 = 10$ и $n_2 = 8$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X_1 и X_2, найдены выборочные средние $\overline{x_1} = 142{,}3$ и $\overline{x_2} = 145{,}3$ и исправленные дисперсии ${S_{x_1}}^2 = 2{,}7$ и ${S_{x_2}}^2 = 3{,}2$. При уровне значимости $p = 0{,}05$ проверить:

1) равенство дисперсий по критерию Фишера;
2) проверить нулевую гипотезу: $H_0 : M(X_1) = M(X_2)$

Решение:

Вычислим экспериментальное значение критерия, определяемое как отношение большей из оценок дисперсий к меньшей:

$$F_{эксп} = \frac{S_{x_2}^2}{S_{x_1}^2} = \frac{3{,}2}{2{,}7} = 1{,}19$$

По таблице критических значений распределений Фишера-Снедекора определим критическое значение $F_{кр}(p, f_1, f_2)$:

$$F_{кр}(p, f_1, f_2) = F_{кр}(0{,}05;9{,}7) = 3{,}68\,.$$

Так как $F_{эксп} < F_{кр}$, то различие оценок дисперсий не является значимым (нулевую гипотезу принимаем). Теперь можно сравнить средние.

Найдем экспериментальное значение по формуле:

$$t_{эксп} = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{(n_1 - 1)S_{x_1}^2 + (n_2 - 1)S_{x_2}^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

$$t_{эксп} = \frac{142{,}3-145{,}3}{\sqrt{(10-1)\cdot 2{,}7+(8-1)\cdot 3{,}2}} \cdot \sqrt{\frac{10\cdot 8(10+8-2)}{10+8}} = -3{,}7$$

Найдем критическое значение:

$$t_{кр}\ (p, n_1+n_2-2) = t_{кр}\ (0{,}05;16) = 1{,}75\ ;$$

$|t_{эксп}| > t_{кр}$, следовательно, генеральные средние различаются значимо.

№11

При анализе вещества двумя методами были получены следующие результаты: $\overline{x} = 98{,}1$; $S_x^{\ 2} = 0{,}04$; $n_x = 6$; $\overline{y} = 97{,}5$; $S_y^{\ 2} = 0{,}06$; $n_y = 8$. В предположении нормальности распределения изучаемых величин проверить при уровне значимости $p = 0{,}05$: 1) значимость различия оценок дисперсий (при конкурирующей гипотезе $\sigma_x^{\ 2} \neq \sigma_y^{\ 2}$); 2) значимость различия средних значений.

Решение:

Вычислим экспериментальное значение критерия, определяемое как отношение большей из оценок дисперсий к меньшей:

$$F_{эксп} = \frac{S_y^2}{S_x^2} = \frac{0{,}06}{0{,}04} = 1{,}5$$

По таблице критических значений распределений Фишера-Снедекора определим критическое значение $F_{кр}(p, f_1, f_2)$:

$$F_{кр}(p, f_1, f_2) = F_{кр}(0{,}05;5{,}7) = 3{,}97\ .$$

Так как $F_{эксп} < F_{кр}$, то различие оценок дисперсий не является значимым (нулевую гипотезу принимаем). Теперь можно сравнить средние.

Найдем экспериментальное значение по формуле:

$$t_{эксп} = \frac{\overline{x_1}-\overline{x_2}}{\sqrt{(n_1-1)S_{x_1}^2+(n_2-1)S_{x_2}^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}$$

$$t_{эксп} = \frac{98{,}1-97{,}5}{\sqrt{(6-1)\cdot 0{,}04+(8-1)\cdot 0{,}06}} \cdot \sqrt{\frac{6\cdot 8(6+8-2)}{6+8}} = 4{,}87$$

Найдем критическое значение:

$$t_{кр}\ (p, n_1+n_2-2) = t_{кр}\ (0{,}05;12) = 2{,}18\ ;$$

$|t_{эксп}| > t_{кр}$, следовательно, средние значения различаются значимо.

4. После рассмотрения вопроса 2.5 решить задачи из методической разработки кафедры.

№12

Проведено 100 опытов по изучению влияния фактора на артериальное давление. При $p = 0{,}05$ оценить значимость различия в действии данного фактора на группы животных, если положительная разность давления n_+ наблюдалась 48 раз, а отрицательная n_- 44 раза.

Решение:

Из чисел 48 и 44 выбираем наименьшее – это 44:

$n_N^{набл} = 44$.

Найдем $n_N^{кр}$ по формуле: $A = \frac{100-1}{2} - 0{,}98 \cdot \sqrt{100+1} = 39{,}6$

Целая часть числа – 39: $n_N^{кр} = 39$.

$n_N^{набл} > n_N^{кр}$, следовательно влияние фактора незначимо.

№13

При исследовании влияния курения на развитие ишемической болезни сердца изучались агрегация тромбоцитов. 111 добровольцев выкуривали по сигарете. До и после курения у них были взяты пробы крови и определена агрегация тромбоцитов. Используя критерий знаков, получили следующие результаты: 86 разностей – положительные, 4 – нулевые и 20 – отрицательные. Можно ли сказать, что изменение агрегации тромбоцитов статистически значимо или нет? Уровень значимости $p = 0{,}05$.

Решение:

Из чисел 20 и 86 выбираем наименьшее – это 20:

$n_N^{набл} = 20$.

Найдем $n_N^{кр}$ по формуле: $A = \frac{111-1}{2} - 0{,}98 \cdot \sqrt{111+1} = 44{,}6$

Целая часть числа – 44: $n_N^{кр} = 44$.

$n_N^{набл} < n_N^{кр}$, следовательно изменение агрегации тромбоцитов статистически значимо.