НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

АЛГЕБРА

Действия над многочленами

$$(a+b+c)m = am+bm+cm;$$

$$(a+b+c)(m+n) = a(m+n)+b(m+n)+c(m+n) = \\ = am+an+bm+bn+cm+cn;$$

$$\frac{a+b+c}{m} = \frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}.$$

Действия над дробями

1. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$ сложение,
2. $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-c\cdot b}{b\cdot d}$ вычитание,
3. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$ умножение,
4. $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$ деление.

Формулы сокращённого умножения

1. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ разность квадратов.
2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ квадрат разности.
3. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ квадрат суммы
4. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$ куб разности
5. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ куб суммы
6. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ сумма квадратов
7. $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$ сумма квадратов
8. $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)=(a-b)\underbrace{\left(a^2+ab+b^2\right)}_{\substack{\textit{Неполный}\\ \textit{квадрат}\\ \textit{суммы}}}$ разность кубов
9. $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=(a+b)\underbrace{\left(a^2-ab+b^2\right)}_{\substack{\textit{Неполный}\\ \textit{квадрат}\\ \textit{разности}}}$ сумма кубов
10. $(x+y+a)^2=x^2+y^2+a^2+2xy+2ax+2ay$ квадрат трехчлена
11. $(x-y-a)^2=x^2+y^2+a^2-2xy-2ax-2ay$ квадрат трехчлена

Действия со степенями

$a^m a^n = a^{m+n}$; $a^0 = 1, \quad a \neq 0$,

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $a^1 = a$;

$(ab)^m = a^m b^m$; $1^a = 1$

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$; $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$; $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Преобразование арифметических корней

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot k]{a^k}, (a \geq 0);$$
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}, (a \geq 0, b \geq 0);$$
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, (a \geq 0, b \geq 0);$$
$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, (a \geq 0, n - натуральное);$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}, \text{ где } \begin{pmatrix} a \geq 0; m, n \in N \\ m \geq 2, n \geq 2 \end{pmatrix};$$
$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| - если\_n - четное, натуральное, n \geq 2. \\ a - если\_n - нечетное, натуральное, n \geq 3. \end{cases};$$

Если $a_1 > a_2 > 0$, то $\sqrt[n]{a_1} > \sqrt[n]{a_2}$.

Частным случаем корня n-ой степени является *квадратный корень* из числа: $\sqrt{a} = b$ или $b^2 = a$.

Преобразование квадратного корня

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b};$$
$$\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}, \text{ где } (a > 0, n - натур);$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \text{ где } (a \geq 0, b > 0);$$
$$\sqrt{a} > \sqrt{b}, \text{ если } a > b;$$
$$\sqrt{a} < \sqrt{b}, \text{ если } a < b.$$

Комплексные числа

Алгебраическая форма $a+bi$,
где a – действительная часть комплексного числа,
b – мнимая часть,
i – мнимая единица $i=\sqrt{-1}$; $i^2=-1$.

Решение уравнений

Линейные уравнения с одной переменной

Это уравнения вида: $ax+b=0$, где $a\neq 0$, x – неизвестное.
Данное уравнения имеет решение: $ax=-b$, $x=-\dfrac{b}{a}$ – корень уравнения.

Квадратные уравнения

В общем случае квадратное уравнение ax^2+bx+c имеет решение:
$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ или $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, где $D=b^2-4ac$ – дискриминант.

Далее возможны три случая:

1. $D>0$, тогда уравнение имеет два действительных корня:
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$
2. $D=0$, тогда уравнение имеет два одинаковых действительных корня:
$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$
3. $D<0$ – уравнение не имеет действительных корней.

Примечание:

1) Иногда квадратное уравнение имеет вид $x^2+px+q=0$ и называется ***приведенным***, оно не содержит коэффициента *а*. Тогда его решение выглядит несколько по-другому:
$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\,.$$
2) Уравнения вида $ax^4+bx^2+c=0$ называются ***биквадратными.*** С помощью замены переменной $x^2=y$ оно приводится к стандартному квадратному уравнению вида $ay^2+by+c=0$ и далее решается по формуле для корней обычного квадратного уравнения.

Теорема Виета

$$x_1 + x_2 = -p = -\frac{b}{a}; \qquad x_1 \cdot x_2 = q = \frac{c}{a}.$$

Логарифмы

Логарифм – показатель степени, в которую надо возвести данное основание, чтобы получить данное число.

$$\log_b N = x \qquad b^x = N \qquad (b \text{ – основание})$$

$a^{\log_a N} = N$ – основное логарифмическое тождество

Основные свойства логарифмов:

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$;
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$;
3. $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$;

Частными случаями свойства 3 являются:

3а. $\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b$; 3б. $\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$;

4. Формула перехода к новому основанию: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$;
5. $\log_a 1 = 0$, так как $a^0 = 1$;
6. $\log_a a = 1$, так как $a^1 = a$.

Десятичные логарифмы

$$\lg N = x \qquad 10^x = N$$

(основание логарифма b=10).

1. $\lg 10^n = n$; 2. $\lg 10^{-n} = -n$; 3. $\lg 10 = 1$.

Натуральные логарифмы

$$\ln N = x \qquad e^x = N$$

Основание логарифма e=2,718…≈2,7.

Например, $\ln 6 = 1{,}79$. Это значит, что $e^{1{,}79} = 6$.

$$\ln N = \ln 10 \cdot \lg N \approx 2{,}3 \lg N;$$

$$\lg N = \lg e \cdot \ln N \approx 0{,}43 \ln N.$$

ТРИГОНОМЕТРИЯ

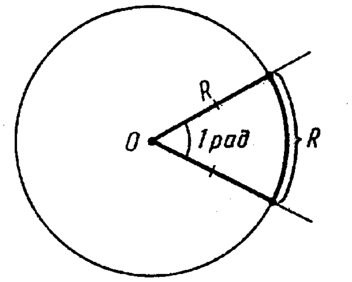
Радианное измерение угла

За ***1 радиан*** принимается величина центрального угла, которому соответствует дуга окружности, длина которой равна радиусу

$$1\ \textit{радиан} = \frac{180^0}{\pi} \approx 57^0 17'$$

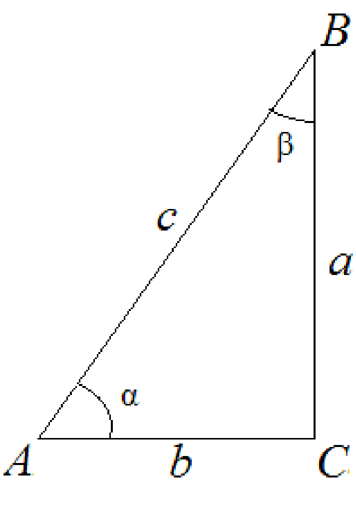
$$1^0 = \frac{\pi}{180}\ \textit{радиан} = 0{,}0175\ \textit{радиана};$$

$$1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60}\ \textit{радиана} \approx 0{,}00029\ \textit{радиана}.$$



Углы в градусах α°	1°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Углы в радианах α_1 *рад*	0,0175	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Определения тригонометрических функций



Синусом угла α называется отношение:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

Косинусом угла α называется отношение:

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

Тангенсом угла α называется отношение:

$$tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}$$

Котангенсом угла α называется отношение:

$$ctg\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}$$

Значения синуса, косинуса, тангенса для различных углов

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	0	$\sqrt{3}$	–	0
$ctg\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	–	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–

Основные тригонометрические тождества

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;.

$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$;

$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$;

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$;

$tg \cdot ctg\alpha = 1$;

$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $(\cos\alpha \neq 0)$;

$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}$, $(\cos\alpha \neq 0)$;

$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$ $(\sin\alpha \neq 0)$.

Формулы сложения и вычитания

Синус суммы и разности двух аргументов:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Косинус суммы и разности двух аргументов:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Тангенс суммы и разности двух аргументов:

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$$
$$tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$$

Формулы приведения

Для синуса

1. $\sin\left(90^\circ + \alpha\right) = \cos\alpha$
2. $\sin\left(180^\circ + \alpha\right) = -\sin\alpha$
3. $\sin\left(270^\circ + \alpha\right) = -\cos\alpha$
4. $\sin\left(360^\circ + \alpha\right) = \sin\alpha$
5. $\sin\left(90^\circ - \alpha\right) = \cos\alpha$
6. $\sin\left(180^\circ - \alpha\right) = \sin\alpha$
7. $\sin\left(270^\circ - \alpha\right) = -\cos\alpha$
8. $\sin\left(360^\circ - \alpha\right) = -\sin\alpha$

Для косинуса

1. $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$
2. $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$
3. $\cos(270^\circ + \alpha) = \sin\alpha$
4. $\cos(360^\circ + \alpha) = \cos\alpha$

4\. $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$
6\. $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$
7\. $\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$
8\. $\cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha$

Все формулы приведения можно представить в виде таблицы:

аргумент / *функция*	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$270^\circ - \alpha$	$270^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$	$360^\circ + \alpha$
sin	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$
ctg	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$

Тригонометрические функции двойного аргумента

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$; $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$;

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2}{ctg\alpha - tg\alpha};$$

$$ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha} = \frac{ctg\alpha - tg\alpha}{2}.$$

Степени синуса и косинуса

$\sin^2\alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$, $\cos^2\alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2$;

$4\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - \sin 3\alpha$; $4\cos^3\alpha = 3\cos\alpha + \cos 3\alpha$

Тригонометрические функции половинного аргумента

1) Синус половинного угла $\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

2) Косинус половинного угла $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

3) Тангенс половинного угла $tg\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

$$tg\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

4) Котангенс половинного угла $ctg\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

$$ctg\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{1+\cos x}{\sin x}$$

Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

Формулы преобразования произведения

$$\sin x\cos y = \frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2};$$

$$\cos x\cos y = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2};$$

$$\sin x\sin y = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}.$$