ТЕМА №1
ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

ПРОГРАММНЫЕ ВОПРОСЫ:

1.1. Функциональная связь. Предел функции.
1.2. Производная функции.
1.3. Механический (физический) и геометрический смысл производной.
1.4. Основные правила дифференцирования.
1.5. Производная сложной функции.
1.6. Производные высших порядков функции. Физический смысл производной 2-го порядка.
1.7. Дифференциал функции как главная часть приращения функции. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
1.8. Функции многих переменных. Частные производные первого порядка. Частные производные высших порядков.
1.9. Частный и полный дифференциалы функции двух переменных.

1.1. Функциональная связь. Предел функции

Функцией называется отношение f между множествами X и Y, при котором каждому элементу $x \in X$ соответствует ***единственный*** элемент $y \in Y$. При этом используется запись $y = f(x)$. Множество X называется ***областью определения*** $D(f)$ функции, а множество Y – ***множеством*** $E(f)$ ***значений функции.*** Другими словами, если каждому значению x из некоторого множества действительных чисел поставлено в соответствии по определённому правилу не более одного числа y, то говорят, что на этом множестве задана функция от переменной x, и записывают $y = f(x)$. Функцию называют также отображением множества $D(f)$ на множество $E(f)$ (рис. 1.1).

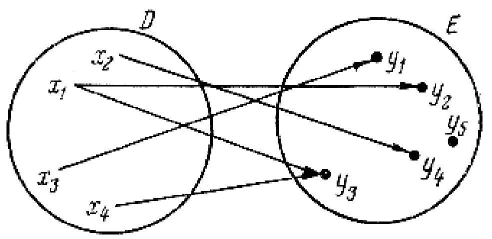

Рис.1.1

<u>Примечание.</u> Для того, чтобы данное множество являлось графиком функции, необходимо и достаточно, чтобы прямая, параллельная оси OY, пересекалась с указанным графиком не более, чем в одной точке.

Способы задания функции

Функция может быть задана:

1. Формулой, т.е. аналитически.

Например,

$$y = x^2,\ y = \sin x \text{ или } y = \begin{cases} x, \text{ если } x \le 0 \\ x^2, \text{ если } x > 0 \end{cases} \text{ и т.д.}$$

2. Таблицей:

x	2	2,5	3	3,5	4	4,1
y	3	4	5	7	7,5	8

3. С помощью графика.

Графиком функции $y = f(x)$ называется изображение на координатной плоскости множества пар (x, y) (рис. 1.2).

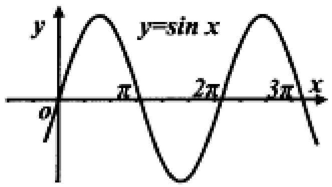

Рис.1.2

1.2.Производная функции

Прежде всего, рассмотрим такие понятия, как ***приращение аргумента*** и ***приращение функции*** (рис.1.3).

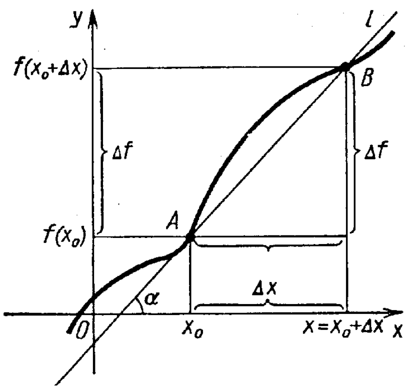

Рис. 1.3

Пусть x и x_0 – значение независимой переменной из области определения функции $f(x)$. Тогда $x - x_0 = \Delta x$ называется ***приращением независимой переменной (или приращением аргумента)***, следовательно, $x = x_0 + \Delta x$. Вследствие этого значение функции изменится на величину $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Разность между новым значением функции $f(x_0 + \Delta x)$ и первоначальным ее значением $f(x_0)$ называется ***приращением функции*** $f(x)$ в точке x_0: $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Пример 1.1: Найти приращение функции $y=x^2$, если $x=2,5$; $x_0=2$.

Решение:

$\Delta x = x - x_0 = 2,5 - 2 = 0,5$; $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 - \Delta x) - f(x_0) = f(2,5) - f(2) =$

$= 6{,}25 - 4 = 2{,}25$.

Функция называется ***возрастающей***, если $\Delta f(x_0) > 0$ при любых $\Delta x > 0$. Функция называется ***убывающей***, если $\Delta f(x_0) < 0$ при любых $\Delta x < 0$.

Производной функции в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента *(Δx)*, когда последнее стремится к нулю: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ (читается «*эф штрих от x_0*»).

Нахождение производной $f'(x)$ от данной функции *f(x)* называют ***дифференцированием*** данной функции.

Примечание. Из определения производной следует, что функция может иметь производную в точке x_0 только в том случае, если она определена в некоторой окрестности точки x_0, включая эту точку. Это утверждение сформулировано в следующей теореме.

Теорема 1.1. Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке *x*, то она непрерывна в этой точке. Обратное утверждение не верно.

Следствие. Если функция разрывна в некоторой точке, то она не имеет производной в этой точке.

1.3. Механический (физический) и геометрический смысл производной

Геометрический смысл производной

Пусть через точку $M(x, y)$ кривой, представляющей собой график функций $y = f(x)$, непрерывной в некоторой окрестности этой точки, проведена секущая *MN*, образующая с положительным направлением оси *Ox* угол β (рис 1.4). Напишем определение производной и попробуем из рисунка и некоторых рассуждений понять её геометрический смысл:

$$f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

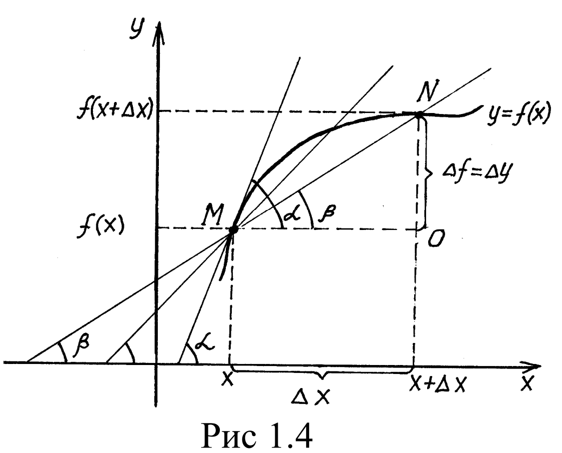

Рис 1.4

Из прямоугольного треугольника *MNO*, образованного секущей, Δx и Δy имеем: $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = tg\beta$ или угловой коэффициент секущей. При стремлении Δx к нулю получаем:

1. Точка N стремится к точке M ($N \to M$).

2. Секущая MN стремится к касательной в точке M.

3. Угол β стремится к углу α.

Следовательно, $tg\beta \to tg\alpha$ (тангенс угла наклона секущей стремится к тангенсу угла наклона касательной).

Таким образом, получаем: $$f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = tg\alpha = k,$$

где k –угловой коэффициент наклона касательной.

Следовательно, ***геометрический смысл производной*** заключается в том, что *производная функции в данной точке равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в данной точке, т. е.* $f'(x_0) = tg\alpha$.

<u>Физический смысл производной</u>

Рассмотрим случай: материальная точка движется по координатной прямой, причём задан закон движения $S = S(t)$. За промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ перемещение точки равно $S(t_0 + \Delta t) - S(t_0) = \Delta S$, а её средняя скорость $\upsilon_{ср.}(\Delta t) = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. С уменьшением промежутка времени Δt средняя скорость всё точнее характеризует скорость точки в данный момент времени t_0 (мгновенную скорость). Следовательно, при $\Delta t \to 0$ $\quad \upsilon_{ср.}(\Delta t) = \dfrac{\Delta S}{\Delta t} \to \upsilon(t_0)$ т. е. средняя скорость будет стремиться к $\upsilon(t_0)$ (к мгновенной скорости):

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} = S'(t_0) = \upsilon(t_0) = \upsilon_{мгн.}.$$

Таким образом, *мгновенная скорость точки в данный момент времени равна значению производной от закона движения*. Это и есть ***физический смысл производной.***

С помощью производной выражается быстрота протекания физических, химических и других природных процессов.

<u>1.4. Основные правила дифференцирования</u>

Пользуясь определением производной функции можно находить производные любых функций. Для этого нужно придерживаться следующей ***схемы нахождения производной***:

1) Выбрав некоторое значение аргумента x, дают ему приращение Δx и находят значение функции в точке $x + \Delta x$, равное $f(x + \Delta x)$.

2) Находят приращение функции, вычитая из последующего значения $f(x+\Delta x)$ её первоначальное значение $f(x)$:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

3) Делят приращение функции Δy на приращение аргумента Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

4) Находят предел этого отношения:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Найденный предел и есть производная от функции $y = f(x)$.

<u>Пример 1.2:</u> Дана функция $f(x) = x^2 - 3$. Найти производную этой функции.

Решение:

1) Даем аргументу x приращение Δx. Тогда новое, приращенное значение аргумента будет $x + \Delta x$.

Находим приращенное значение функции, подставив в выражение для функции вместо x величину $x + \Delta x$, получим:

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 - 3.$$

2) Находим приращение функции:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = ((x+\Delta x)^2 - 3) - (x^2 - 3).$$

Раскроем все скобки и приведем подобные члены:

$$\Delta y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3 - x^2 + 3 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

3) Делим приращение функции Δy на приращение аргумента Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

4) Находим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, т.е. производную:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Таким образом, производной для функции $f(x) = x^2 - 3$ является функция $f'(x) = 2x$.

<u>Производные элементарных функций</u>

Из предыдущего материала видно, что нахождение производной функции с использованием определения производной весьма трудоемкий процесс, и для функции любого вида данная процедура проделывается аналогично приведённому выше примеру. Подобным способом были найдены производные всех элементарных функций. Мы опускаем этап нахождения производной как предела отношения приращения функции к приращению аргумента и приводим только результат – таблицу производных элементарных функций.

Таблица производных элементарных функций

1. $(C)' = 0$
2. $(x)' = 1$
3. $(x^k)' = kx^{k-1}$ *где* $k \in Q$
4. $(Cx)' = C(x)'$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in z$
8. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq \pi n,\ n \in z$
9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(-1 < x < 1)$
10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(-1 < x < 1)$
11. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
12. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
13. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
14. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
15. $(a^x)' = a^x \ln a$
16. $(e^x)' = e^x$

Производные суммы, произведения и частного

Производная суммы. Пусть u и v – две дифференцируемые функции, определённые на одном и том же промежутке. Тогда производная алгебраической суммы этих функций равна алгебраической сумме производных этих функций: $(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x)$. Методом математической индукции доказывается, что эта формула справедлива для любого конечного числа слагаемых:

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_k)' = u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_k .$$

Производная постоянной величины равна нулю:

$$(C)' = 0, \text{ где } c = const.$$

Пример1.3: Найти $f'(x)$, если $f(x) = x+3$.

Решение: $f'(x) = (x+3)' = (x)' + (3)' = 1 + 0 = 1$.

Производная произведения двух дифференцируемых функций u и v равна сумме произведений второй функции на производную первой и первой функции на производную второй:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Пример 1.4: Найти производную функции $f(x) = x^2(x+1)$.

Решение:

$(x^2(x+1))' = (x^2)'(x+1) + x^2(x+1)' = 2x(x+1) + x^2 \cdot 1 = 2x^2 + 2x + x^2 = 3x^2 + 2x$.

эту же производную можно найти другим способом:

$$(x^2(x+1))' = (x^3 + x^2)' = 3x^2 + 2x\ .$$

Производная частного. Если функции u и v имеют в точке х производные и если $v(x) \neq 0$, то в этой точке существует производная их частного u/v, которая вычисляется по формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

<u>*Пример 1.5:*</u> Найти $f'(x)$, если $f(x) = \dfrac{3+5x}{1-3x}$.

Решение:

$$\left(\frac{3+5x}{1-3x}\right)' = \frac{(3+5x)'(1-3x) - (3+5x)(1-3x)'}{(1-3x)^2} = \frac{(3'+(5x)')(1-3x) - (3+5x)(1'-(3x)')}{(1-3x)^2} =$$

$$= \frac{5(1-3x) - (3+5x)(-3)}{(1-3x)^2} = \frac{14}{(1+3x)^2}$$

<u>*1.5. Производная сложной функции*</u>

Функция $y = F(x)$, которая числу x ставит в соответствие число $f(g(x))$, называется функцией от функции или ***сложной функцией***, образованной из функций f и g в указанном порядке: $y = f(g(x))$, где $y = f(u)$, $u = g(x)$. Любую сложную функцию можно представить в виде элементарных (простых) функций, которые являются ее промежуточными аргументами. Приведем некоторые примеры простых и сложных функций:

Простые функции: x^2, *lg x, cosx, ctgx…*

Сложные функции: $\ln x^2$, $(\lg x)^2$, $\cos x^5$, $ctg^2 x$…

Сложную функцию $\ln x^2$ можно представить, как функцию *ln(u)*, где $u=x^2$. Функция u является промежуточным аргументом. Правило дифференцирования сложной функции выражается следующей теоремой:

<u>*Теорема 1.2.*</u> Если функция *u=g(x)* имеет производную $u'(x) = g'(x)$ в точке x, а функция $y = f(u)$ – производную $y'_u = f'(u)$ в соответствующей точке u, то сложная функция $y = f(g(x))$ в данной точке x имеет производную:

$$y'_x = f'(u) \cdot u'(x)\ .$$

Примечание. Можно рассуждать по-другому: в формуле *y(x)=f(g(x))* функция ***g(x) – внутренняя функция*** или ***промежуточный аргумент, функция f(g(x)) – внешняя***. Сначала дифференцируем внешнюю функцию по промежуточному аргументу, а затем – промежуточный аргумент (внутреннюю функцию) по аргументу *x*, и находим их произведение. По-другому, данная теорема называется ***правилом «цепочки»***.

Пример 1.6: Найти производную функции $y=(3-5x+x^2)^{100}$

Решение:

Пусть $u=g(x)=3-5x+x^2$ – внутренняя функция или промежуточный аргумент, тогда функция $y=(3-5x+x^2)^{100}$ приобретает вид: $y=u^{100}$. Используя теорему о дифференцировании сложной функции, получаем:

$$y'(x)=(u^{100})'_u\cdot u'_x(x)=100u^{99}\cdot u'_x(x)=100(3-5x+x^2)^{99}\cdot(3-5x+x^2)'_x=$$
$$=100(3-5x+x^2)^{99}\cdot(2x-5).$$

1.6. Производные высших порядков функции. Физический смысл производной 2-го порядка

Производной ***первого порядка*** называется первая производная функции $y'=f'(x)$. Производной ***второго порядка*** или второй производной функции называется производная от её производной. Она обозначается символами:

$$y''=(y')' \text{ или } f''(x)=(f'(x))'.$$

Вторая производная в свою очередь есть функция от *x* и ее тоже можно продифференцировать. Производная от второй производной называется производной третьего порядка или третьей производной и обозначается $y'''(x)$. Производная $(n-1)$ производной (*n* – натуральное число) называется производной n-ого порядка или n-ой производной и обозначается $y^{(n)}(x)$.

Мгновенная скорость *υ(t)* также как и закон движения, является функцией времени. Поэтому можно рассматривать вторую производную от закона движения как скорость изменения скорости, или вторую производную от функции закона движения: $\upsilon'(t)=S''(t)=a$. В физике данная величина называется ***ускорением*** и, также как и скорость, имеет важное значение для исследования различных биологических процессов.

Таким образом, ***физический (или механический) смысл второй производной*** заключается в следующем: если задан закон, которому подчиняется движение материальной точки, то ***вторая производная есть ускорение*** этого движения.

1.7. Дифференциал функции как главная часть приращения функции. Применение дифференциала к приближенным вычислениям

С понятием производной тесно связано понятие дифференциала функции. Пусть непрерывная функция *f(x)* имеет производную в точке x_0, тогда, согласно определению производной функции *f(x)* в точке x_0, имеем:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Отсюда следует, что для всех достаточно малых Δx справедливо приближенное равенство $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\approx f'(x_0)$. Следовательно, $\Delta f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$. Выражение $f'(x_0)\Delta x$ называется ***главной частью приращения функции или дифференциалом функции*** и обозначается *df*:

$$df=f'(x_0)\Delta x\approx\Delta f(x_0).$$

Например, если рассматривать функцию *f(x)=x*, то на основании формулы для дифференциала имеем $df=dx=f'(x)\Delta x=x'\Delta x=\Delta x$, следовательно, $df=dx=\Delta x$. Таким образом, ***дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал аргумента:***

$$df=f'(x)dx.$$

Примечание. Короткая запись данных рассуждений имеет вид:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\approx\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\Rightarrow f'(x_0)\cdot\Delta x\approx\Delta f(x_0); f'(x_0)\Delta x=df\Rightarrow df\approx\Delta f(x_0)$$

Пользуясь определением дифференциала $df(x)=f'(x)dx$, получаем ***выражение производной функции через дифференциал*** (или другую запись определения производной функции):

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Используя выражение $\Delta f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$, можно получить основную формулу для простейших приближенных вычислений. Учитывая, что приращение функции имеет вид $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, получаем:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0)\Delta x + f(x_0).$$

Формула $f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0)\Delta x + f(x_0)$ ***применяется для приближенных вычислений значений функции в точке.*** Из нее следует, что приближенное значение функции в некоторой точке $x_0+\Delta x$ равно произведению производной функции в точке x_0 на приращение аргумента плюс значение функции в точке x_0.

Пример 1.7: Найдем приближенное значение кубического корня $\sqrt[3]{26{,}19}$.

Решение:

Полагая $x_0 = 27,\ \Delta x = 27 - 26{,}19 = -0{,}81$; $f(x) = \sqrt[3]{x},\ f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ и используя формулу для приближенных вычислений $f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0)\Delta x + f(x_0)$, получим:

$$f(x_0) = \sqrt[3]{27},\ f'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}},$$

$$f(x_0 + \Delta x) = \sqrt[3]{27 + (-0{,}81)} = \sqrt[3]{26{,}19} \approx -\frac{0{,}81}{3\sqrt[3]{27}} + \sqrt[3]{27} = -\frac{0{,}81}{3 \cdot 9} + 3 = 2{,}97$$

1.8. Функции многих переменных. Частные производные первого порядка. Частные производные высших порядков

Большинство процессов, явлений в окружающем нас мире определяются не одной независимой переменной, а несколькими, функционально связанными между собой. Для изучения подобных зависимостей введено понятие ***функции нескольких аргументов.***

Например, площадь прямоугольника $S = ab$ есть функция двух независимых переменных сторон *a* и *b*. Объем прямоугольного параллелепипеда $V = abc$ является функцией трех независимых переменных – ребер *a , b, c* параллелепипеда.

Для функции двух или нескольких переменных рассматриваются вместо обычных производных – ***частные производные***.

Пусть дана некоторая функция двух аргументов *z=f(x,y)*. Если мы дадим приращение только одному аргументу, например *x*, а второй аргумент у зафиксируем, то можно получить частное приращение функции по этому аргументу:

$$\Delta_x f(x, y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Аналогично разность $\Delta_y f(x,y) = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$ называется частным приращением функции *z=f(x,y)* по аргументу *y*.

Частной производной функции двух независимых переменных *z=f(x,y)* называется производная, взятая по одному из аргументов, а второй аргумент при этом считается постоянным.

Например, частной производной функции *z=f(x,y*) по аргументу *x* называется предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$ если он существует, а частной производной по аргументу *y* называется предел $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$.

Частные производные по аргументам *x* и *y* обозначаются следующим образом: $z'_x\,;\, z'_y\,;\, f'_x(x,y)\,;\; f'_y(x,y)\,;\, \dfrac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}\,;\, \dfrac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}\,;\, \dfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\,;\, \dfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}$.

Частные производные I-го порядка функции $z = f(x,y)$ также являются функциями аргументов *x* и *y*. Частные производные этих функций называются частными производными второго порядка искомой функции $z = f(x,y)$. Для этой функции можно определить четыре частные производные 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right); \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right); \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right); \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Частные производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ отличаются порядком дифференцирования и называются ***смешанными частными производными*** второго порядка.

1.9. Частный и полный дифференциалы функции двух переменных

По аналогии с дифференциалом функции одной независимой переменной ***частные дифференциалы функции*** по *x* и по *y* будут равны:

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx\,; \qquad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy\,.$$

Полный дифференциал функции двух независимых переменных будет равен сумме частных дифференциалов:

$$dz = d_x z + d_y z = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\,.$$

Полный дифференциал функции двух независимых переменных является главной частью полного приращения и может быть использован для приближенных расчетов полного приращения функции $z=f(x,y)$, т.е. $\Delta f \approx df$.

$$\Delta z \approx \Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Абсолютная величина полного приращения функции $|\Delta z| \approx |\Delta f|$ при расчете погрешности измерения называется её абсолютной ошибкой. Если заменить полное приращение функции дифференциалом, то её абсолютная ошибка рассчитывается по приведенной формуле полного дифференциала.

Пример 1.8: Найти частные производные и полный дифференциал функции:

$$Z = 3x^3y^2 + x^2y^2 + y^4$$

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (3x^3y^2 + x^2y^2 + y^4)'_x = 9x^2y^2 + 2xy^2 \quad (y = const);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (3x^3y^2 + x^2y^2 + y^4)'_y = 6x^3y + 2x^2y + 4y^3 \quad (x = const);$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (9x^2y^2 + 2xy^2)dx + (6x^3y + 2x^2y + 4y^3)dy$$