ТЕМА №2
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

ПРОГРАММНЫЕ ВОПРОСЫ:

2.1. Первообразная функции и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Основные формулы интегрирования.
2.2. Простейшие способы интегрирования: непосредственное интегрирование, интегрирование методом подстановки и по частям.
2.3. Понятие определенного интеграла.
2.4. Основные свойства определенного интеграла.
2.5. Определенный интеграл с переменным верхним пределом.
2.6. Связь между определенным и неопределенным интегралами. Формула Ньютона-Лейбница.
2.7. Замена переменных интегрирования в определенных интегралах. Интегрирование по частям.
2.8. Применение определенного интеграла к вычислению площади плоской фигуры и расчету работы переменной силы.

2.1. Первообразная функции и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Основные формулы интегрирования

Известно, что многие математические операции образуют пары взаимно обратных действий. Например, сложение и вычитание, умножение и деление, логарифмирование и потенцирование. Точно также и для операции дифференцирования существует обратная операция – интегрирование или нахождение функции *F(x)* по известной ее производной $f(x) = F'(x)$ или дифференциалу $f(x)dx$. Функцию ***F(x)*** называют ***первообразной*** на заданном промежутке для функции *f(x)*, если для всех *x* из этого промежутка $F'(x)=f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$. Например, функция $F(x)=\frac{x^4}{4}$ есть первообразная для функции $f(x)=x^3$ на промежутке $(-\infty;+\infty)$, т. к. $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{1}{4}\cdot 4x = x^3 = f(x)$ для всех $x \in (-\infty;+\infty)$. Можно заметить, что функция $\left(\frac{x^4}{4}\right) + 6$ имеет ту же самую производную x^3; поэтому $\left(\frac{x^4}{4}\right) + 6$ также есть первообразная для $f(x) = x^3$ на всей области определения. Ясно, что вместо «6» можно поставить любую постоянную «С». Таким образом, задача нахождения первообразной неоднозначна. Она имеет бесконечное множество решений.

Совокупность первообразных ***F(x)+C*** для данной функции *f*(x)dx называют ***неопределённым интегралом от функции f(x)*** и обозначают $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

– читается *«неопределенный интеграл эф от икс дэ икс»*, где *f(x)dx* – подынтегральное выражение; *f(x)* – подынтегральная функция; *C* – постоянная интегрирования; символ $\int$ – знак неопределенного интеграла. Под знаком неопределенного интеграла мы имеем не производную искомой функции, а ее дифференциал.

Вычисление интеграла от данной функции называется ***интегрированием*** этой функции.

Свойства неопределённого интеграла

1. Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left[\int f(x)dx\right]' = \left[F(x) + C\right]' = F'(x) = f(x)$$

2. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению (дифференциал уничтожает интеграл):

$$d\left[\int f(x)dx\right] = d\left[F(x) + C\right] = \left[F(x) + C\right]' dx = F'(x)dx = f(x)dx$$

3. Интеграл от дифференциала первообразной равен самой первообразной:

$$\int d(F(x) + C) = \int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

5. Интеграл от алгебраической суммы равен алгебраической сумме интегралов слагаемых:

$$\int (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$$

6. Дополнительное свойство: Если *F′(x)=0* на некотором промежутке, то функция *F(x)* – постоянна на этом промежутке.

Основные формулы интегрирования

1. $\int dx = x + C$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

5. $\int e^x dx = e^x + C$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x + C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

12. $\int tg\, x dx = -\ln|\cos x| + C$

13. $\int ctg\, x dx = \ln|\sin x| + C$

14. $\int \cos ec\, x dx = \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C$

15. $\int \sec x dx = \ln\left|ctg \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right| + C$

16. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

17. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C$

18. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

20. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$

2.2. Простейшие способы интегрирования: непосредственное интегрирование, интегрирование методом подстановки и по частям

а) Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование – это нахождение интегралов функции, основанное на прямом применении свойств неопределённых интегралов и таблицы основных формул интегрирования.

Пример 2.1:

1) $\int (x-3)^2 dx = \int (x^2 - 6x + 9) dx = \int x^2 dx - 6\int x dx + 9\int dx = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x + C$;

2) $\int 2\cos x dx = 2\sin x + C$.

В подавляющем большинстве случаев мы имеем дело с интегралами функций, которые нельзя найти непосредственным интегрированием. В этом случае необходимо сделать подстановку (заменить переменную).

б) Интегрирование подстановкой (замена переменной)

Способ подстановки заключается в том, чтобы перейти от данной переменной интегрирования к другой переменной с целью упростить подынтегральное выражение и привести его к одному из табличных интегралов. Общих правил для выбора вида новой переменной не существует, задача решается в каждом конкретном случае индивидуально. Однако существует определённая последовательность действий для данного метода.

Пример 2.2: Найти следующий интеграл: $\int e^{2x+3}dx$.

Решение:

1. Введём новую переменную *t*, связанную с *x* следующей зависимостью:

$$2x+3=t$$

2. Возьмём дифференциал от левой и правой части этого равенства:

$$d(2x+3)=dt$$
$$(2x+3)'dx=dt$$
$$2dx=dt \Rightarrow dx=\frac{dt}{2}$$

3. Теперь вместо $2x+3$ и dx в подынтегральное выражение подставим их выражения через новую переменную *t*. Тогда получим:

$$\int e^{2x+3}dx=\frac{1}{2}\int e^{t}dt=\frac{1}{2}e^{t}+C$$

4. Возвращаемся к прежней переменной *x*:

$$\frac{1}{2}e^{t}+C=\frac{1}{2}e^{2x+3}+C$$

Таким образом, мы получили искомый интеграл: $\int e^{2x+3}dx=\frac{1}{2}e^{2x+3}+C$. Можно убедиться в правильности решения, если продифференцировать полученную первообразную:

$$\left(\frac{1}{2}e^{2x+3}+C\right)'=\frac{1}{2}e^{2x+3}\cdot(2x+3)'=\frac{1}{2}e^{2x+3}\cdot 2=e^{2x+3}.$$

в) Интегрирование по частям

Данный метод применяется в том случае, когда подынтегральное выражение представляет собой произведение какой-то функции *u* на дифференциал совсем другой функции *dv*.

Интегрирование производится по формуле:

$$\int udv=uv-\int vdu$$

Способ интегрирования по частям применяется в том случае, когда интеграл $\int vdu$ оказывается более удобным для интегрирования (возможно даже, табличным), чем исходный интеграл $\int udv$.

<u>*Пример 2.3:*</u> Вычислить интеграл: $\int x\ln x dx$.

Решение:

Применим формулу интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu$.

Положим $u = \ln x, \quad dv = xdx$, тогда $du = d(\ln x) = \frac{1}{x}dx; \quad \int dv = \int xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$.

По формуле получим: $\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C$.

В некоторых случаях для сведения данного интеграла к табличному формула интегрирования по частям применяется несколько раз.

<u>*2.3. Понятие определенного интеграла*</u>

Понятие определенного интеграла широко используется в математике и в различных прокладных науках. Например, при вычислении площадей фигур, ограниченных кривыми, объемов тел произвольной формы, работы переменной силы, и т. д. В свою очередь, задача вычисления площади криволинейной трапеции приводит к определению понятия определенного интеграла.

Пусть имеется непрерывная функция $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Фигура, ограниченная данной кривой $y = f(x)$, отрезком $[a;b]$ оси абсцисс и прямыми $x = a$ и $y = b$, называется ***криволинейной трапецией*** (рис. 2.1).

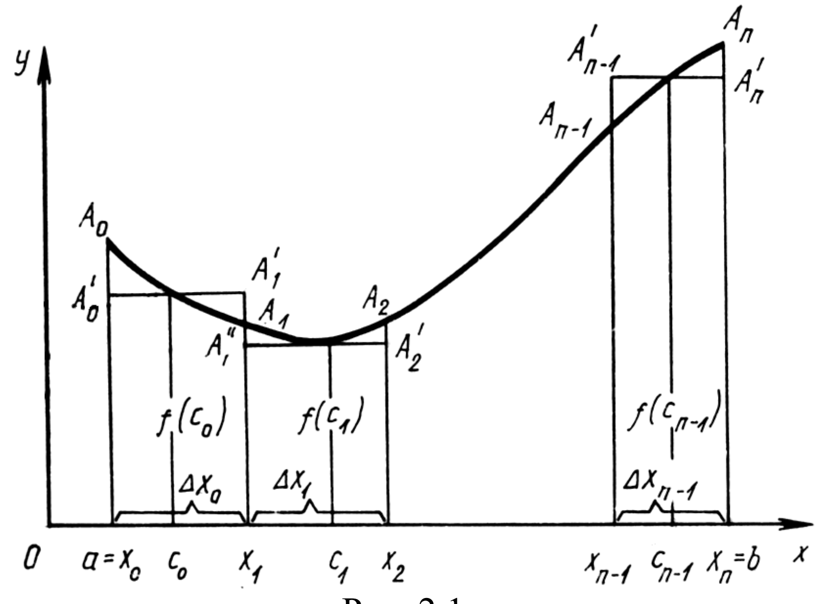

Рис. 2.1

Предположим, что $f(x) > 0$ на отрезке $[a;b]$, т.е. криволинейная трапеция расположена над осью Ox. Найдём площадь этой криволинейной трапеции. Для этого:

1) Разобьем отрезок $[a;b]$ на n необязательно равных частей и обозначим точки деления следующим образом:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 ... < x_n = b$$

2) Из этих точек $x_0, x_1, ... x_n$ восстановим перпендикуляры до пересечения с кривой $y = f(x)$. Получим значения функции в этих точках:

$$y = f(x_0); \quad y_1 = f(x_1); \quad y_2 = f(x_2); \quad ...; \quad y_{n-1} = f(x_{n-1}); \quad y_n = f(x_n)$$

Таким образом, мы всю нашу криволинейную трапецию разбили на n элементарных трапеций.

3) На отрезках $\Delta x_0, \Delta x_1, ..., \Delta x_{n-1}$ возьмем произвольные точки $C_0, C_1, C_2, ..., C_{n-1}$ и проведем перпендикуляры из этих точек до пересечения с кривой $y = f(x)$. Получим $f(C_0), f(C_1), f(C_2), ..., f(C_{n-1})$. Построим ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников с основаниями Δx_i и высотами $f(C_i)$.

4) Элементарная площадь i-го прямоугольника будет равна:

$$S_i = f(C_i)(x_{i+1} - x_i) = f(C_i) \cdot \Delta x_i$$

5) Площадь всей ступенчатой фигуры, покрывающей криволинейную трапецию, будет равна сумме площадей прямоугольников, из которых состоит ступенчатая фигура:

$$S_n = f(C_0)(x_1 - x_0) + f(C_1)(x_2 - x_1) + ... + f(C_{n-1})(x_n - x_{n-1}) =$$
$$= f(C_0) \cdot \Delta x_0 + f(C_1) \cdot \Delta x_1 + ... + f(C_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1}$$

Для сокращения записи этой суммы вводят символ $\sum$ (сигма) – знак, означающий суммирование величин. Тогда

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(C_i)(x_{i-1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(C_i) \cdot \Delta x_i \ .$$

Эта сумма S_n, которая называется ***интегральной суммой***, может быть больше или меньше истинного значения площади искомой трапеции. Наиболее близким значением к истинной величине площади будет предел интегральной суммы при условии, что элементарные отрезки Δx_i будут очень маленькими, т. е. длинна наибольшего из них будет стремиться к нулю $(\max \Delta x_i \to 0)$, а их самих будет больше $(n \to \infty)$.Тогда:

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=0}^{n-1} f(C_i) \, . \, \Delta x_i \ .$$

Этот предел интегральной суммы (если он существует) называется ***определённым интегралом от функции*** $f(x)$ ***на отрезке*** $[a;b]$ ***и обозначается***:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=0}^{n-1} f(C_i)\Delta x_i$$

– читается *«определённый интеграл от а до b эф от икс дэ икс».* Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования.

Таким образом, ***площадь криволинейной трапеции численно равна интегралу от функции, ограничивающей трапецию, взятому на интервале интегрирования*** $[a;b]$:

$$S = \int_a^b f(x)dx .$$

Это и есть ***геометрический смысл определённого интеграла***.

Примечание: Определённый интеграл – это число, в отличие от неопределённого интеграла, который равен совокупности функций – первообразных.

2.4. Основные свойства определенного интеграла

Рассмотрим ***свойства определенного интеграла***:

1. Определённый интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_0}^{t} f(t)dt = \int_{u_0}^{u} f(u)du .$$

2. Определённый интеграл от суммы конечного числа непрерывных функций, заданных на отрезке $[a,b]$ равен сумме определённых интегралов слагаемых функций:

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + ...)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + ...$$

3. Постоянный множитель «k» в подынтегральном выражении выносится за знак интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx .$$

4. Если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то определённый интеграл изменит свой знак на противоположный, сохранив абсолютную величину:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx .$$

Если пределы интегрирования равны между собой $(b = a)$, то определенные интеграл равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

5. Если существуют интегралы $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$, то существует также $\int_a^b f(x)dx$ для любого взаимного расположения точек a,b,c:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6. $\int_a^b dx = b - a$ при $a \neq b$. Это свойство вытекает из того, что неопределённый интеграл $\int_a^b dx = x$, т. е. равен некоторой длине отрезка, началом и концом которого будут точки a и b этого отрезка.

7. Если подынтегральная функция на отрезке $[a,b]$ сохраняет постоянный знак, то и определенный интеграл будет представлен числом того же знака, что и функция, т.е. если $f(x) > 0$, то и $\int_a^b f(x)dx > 0$. Существуют и другие свойства определенного интеграла, которые мы рассматривать не будем.

2.5. Определенный интеграл с переменным верхним пределом

Введем понятие интеграла с переменным верхним пределом. Каждому числу x поставим в соответствие число

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x),$$

т.е. получим функцию от x. Эта функция называется ***определенным интегралом с переменным верхним пределом***.

Примечание. В интеграле $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$ переменная интегрирования обозначена буквой t для отличия ее от переменной x верхнего предела интеграла. Так как определенный интеграл от обозначения переменной не зависит, можно записать его в виде $\int_a^x f(x)dx$.

Теорема 2.1. Производная определенного интеграла от непрерывной функции $f(x)$ по его верхнему пределу равна подынтегральной функции с заменой переменной интегрирования верхним пределом, или определенный интеграл с переменным верхним пределом есть первообразная для подынтегральной функции:

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = \Phi'(x) = f(x).$$

2.6. Связь между определенным и неопределенным интегралами. Формула Ньютона-Лейбница

Как отмечалось выше, неопределённый интеграл – это совокупность первообразных функций, а определённый интеграл – число. Между ними существует определённая связь, которую устанавливает формула Ньютона – Лейбница и выражается в виде теоремы.

Теорема 2.2. Значение определённого интеграла равно разности значений любой первообразной от подынтегральной функции, взятой при верхнем и нижним пределах интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \text{ где } F'(x) = f(x).$$

Таким образом, нахождение определённого интеграла сводится к следующим операциям:

1) находят первообразную для данной функции;
2) вычисляют первообразную для данных частных значений верхнего и
нижнего пределов интегрирования (подставляют пределы интегрирования в первообразную вместо x);
3) находят разность частных значений первообразной $F(b) - F(a)$.

Пример 2.4: Вычислить интеграл $\int_2^3 x^3 dx$

Решение:

$$\int_2^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_2^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{16}{4} = 20{,}25 - 4 = 16{,}25.$$

Как и для неопределённого интеграла, этот метод называется ***методом непосредственного интегрирования.*** Он применим для наиболее простых функций и использует первообразные, которые есть в таблице неопределенных интегралов. Если же интегрируемая функция является сложной, и её непосредственно проинтегрировать не получается, то применяют другие методы, например, метод замены переменной.

2.7. Замена переменных интегрирования в определенных интегралах. Интегрирование по частям

Из установленной с помощью формулы Ньютона-Лейбница связи между определённым и неопределенным интегралами следует, что для вычисления определённого интеграла можно также применять ***метод замены переменной***. Так же, как и для неопределенного интеграла, вводится новая переменная, с помощью которой интеграл становится табличным. Отличие состоит в том, что при этом обязательно нужно заменить пределы интегрирования определенного интеграла. Рассмотрим применение метода замены переменной интегрирования для вычисления определенного интеграла на примере. Найдем определенный интеграл

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cdot \cos x dx .$$

Последовательность действий следующая:

1. Введём новую переменную t, связанную с x следующей зависимостью:

$$t = \sin x ;$$

2. Возьмём дифференциал от левой и правой части этого равенства:

$$\begin{gathered} d(\sin x) = dt \\ \cos x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{\cos x} \end{gathered} ;$$

3. Найдем новые пределы интегрирования, т. к., согласно свойству определенного интеграла, изменение переменной интегрирования требует изменения пределов интегрирования:

$$\begin{gathered} t_{верх} = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ t_{нижн} = \sin 0 = 0 \end{gathered} ;$$

4. Теперь вместо *sinx* и *dx* в подынтегральное выражение подставим их выражения через новую переменную *t*, а вместо старых пределов подставим новые и применим формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ d(\sin x) = dt \\ \cos x dx = dt \\ t_{верх.} = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ t_{ниж.} = \sin 0 = 0 \end{array} \right| = \int_0^1 e^t dt = e^t |_0^{/} = e^{\prime} - e^0 = 2{,}7 - 1 = 1{,}7 .$$

Таким образом, мы вычислили определенный интеграл.

Примечание. Новая переменная выбирается так, чтобы новый интеграл стал табличным.

Определенный интеграл может быть вычислен методом интегрирования по частям. Если функции u и v имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$, то для определенного интеграла справедлива формула:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu .$$

Пример 2.5: Вычислить интеграл: $\int_1^2 \ln x dx$.

Решение:

Применим формулу интегрирования по частям $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$.

Положим $u = \ln x,\quad dv = dx$, тогда $du = d(\ln x) = \frac{1}{x}dx;$ $\int dv = \int dx \Rightarrow v = x$.

По формуле получим:

$$\int_1^2 \ln x dx = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x}dx = 2\ln 2 - \ln 1 - x\Big|_1^2 =$$
$$= 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1$$

2.8. Применение определенного интеграла к вычислению площади плоской фигуры и расчету работы переменной силы

а) Вычисление площадей плоских фигур

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Если $f(x) > 0$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, численно равна интегралу:

$$S = \int_a^b f(x)dx .$$

Если $f(x) \le 0$, то площадь соответствующей криволинейной трапеции определяется формулой

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right| .$$

Если кривая $y = f(x)$ пересекает ось Ox, то отрезок $[a;b]$ нужно разбить на части, в пределах которых $f(x)$ не меняет знака. К каждой такой площади необходимо применить формулу $S = \int_a^b f(x)dx$ или $S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$, и общая площадь будет равна сумме частей.

б) Работа переменной силы

Пусть под действием переменной силы $F = f(s)$ тело движется по прямой *MN* (рис. 2.2). Направление силы совпадает с направлением движения. Требуется определить работу, производимую силой $F = f(s)$ при перемещении тела из положения *M* и положение *N*.

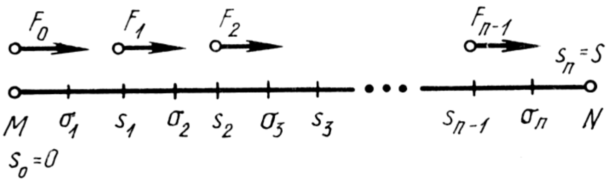

Рис.2.2

Разобьем путь *MN* точками $s_0 = 0, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n = S$ на *n* элементарных отрезков $[s_{i-1}, s_i]$ длиной $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$. В каждом элементарном отрезке выберем точку σ_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Положим, что сила $f(\sigma_i)$ на каждом элементарном отрезке постоянна. Тогда произведение $f(\sigma_i)\Delta s_i$ будет приближенно равно работе силы на пути Δs_i. Сумма работ на элементарных отрезках

$$A_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\sigma_i)\Delta s_i$$

приближенно равна работе силы $F = f(s)$ на пути *MN*.

Данная сумма является интегральной. Предел ее при $n \to \infty$ и $\max \Delta s_i \to 0$ выражает работу переменной силы $F = f(s)$ на пути *MN*:

$$A_n = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\sigma_i)\Delta s_i = \int_0^s f(s)ds$$

Т.е. работа переменной силы $F = f(s)$ численно равна интегралу от силы, взятому по пути *S*.

<u>*Пример 2.6*</u>: Вычислить работу, совершенную одним молем идеального газа при обратимом изотермическом расширении от $2{,}24 \cdot 10^{-3}$ до $22{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3 при $t = 0^\circ C$.

Решение:

При обратимом расширении одного моля идеального газа давление $p = RT/V$. Совершаемая газом при изменении объема на величину dV элементарная работа $dA = pdV$. Полная работа расширения газа от начального объема V_1 до конечного объема V_2.

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT}{V} dV = RT \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = RT \ln \frac{V_2}{V_1} = 8{,}32 \cdot 273 \ln \frac{22{,}4 \cdot 10^{-3}}{2{,}24 \cdot 10^{-3}} = 5{,}23 \quad кДж$$