# ТЕМА №3
# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ПРОГРАММНЫЕ ВОПРОСЫ:

*3.1. Основные определения теории обыкновенных дифференциальных уравнений.*
*3.2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.*
*3.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.*
*3.4. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.*
*3.5. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.*
*3.6. Моделирование задач физико-химического, фармацевтического и медико-биологического содержания с помощью дифференциальных уравнений.*

## ***3.1. Основные определения теории обыкновенных дифференциальных уравнений***

Многие задачи естествознания приводят к появлению уравнений, в которых помимо неизвестной функции $y$ и аргумента $x$ входят производные (или дифференциалы) этой функции.

Уравнение, связывающее аргумент $x$, искомую функцию $f(x)$ и её производные $f'(x)$; $f''(x)$; $f'''(x)$; …; $f^{(n)}(x)$ или дифференциалы $df$; $d^2f$; $d^3f$; …; $d^nf$ называется ***дифференциальным уравнением***.

Дифференциальное уравнение в общем виде можно записать так:

$$F\left[x, f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right] = 0$$

или

$$F\left[x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right] = 0.$$

Если искомая функция зависит только от одного аргумента, то дифференциальное уравнение называется ***обыкновенным.*** Если же искомая функция зависит от нескольких аргументов, то дифференциальное уравнение называется ***уравнением в частных производных.***

Дифференциальные уравнения принято классифицировать по порядку производной (или дифференциала) от искомой функции, входящей в уравнение. Наивысший порядок этой производной и определяет порядок дифференциального уравнения. Например,

$$y''' + 2xy^4 = 0$$

есть обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка, а уравнение не затухающего гармонического колебания

$$\frac{d^2S}{dt^2}+\omega_0{}^2S=0$$

является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка.

Примером дифференциального уравнения в частных производных являются уравнения Максвелла. Для случая плоской электромагнитной волны они имеют вид:

$$\frac{\partial E}{\partial x}=\mu\frac{\partial H}{\partial t} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial H}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}$$

и являются дифференциальными уравнениями первого порядка.

***Решением или интегралом дифференциального уравнения*** называется всякая функция $y=f(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение, превращает его в тождество. Решить уравнение или, как говорят, проинтегрировать его – это значит найти его решение.

***Общим решением*** дифференциального уравнения *n-го* порядка называется функция $y=f(x,C_1,C_2,...,C_n)$ от $x$ с произвольными постоянными $C_1,C_2,...,C_n$ обращающая это уравнение в тождество.

При любом наборе конкретных постоянных получаются ***частное решение.*** При этом задаются не сами постоянные, а условие, которому должно удовлетворять искомое частное решение. Задание таких условий называется заданием начальных условий и кратко записывается так: при $x=x_0$, $f(x_0)=y_0$, $f'(x_0)=y'_0$ и т.д.

Задача нахождения частного решения удовлетворяющего его начальным условиям, называется ***задачей Коши***.

К сожалению, для многих типов дифференциальных уравнений решение можно найти далеко не всегда. Это является сложнейшей математической задачей. Однако для некоторых типов дифференциальных уравнений решение находится сравнительно легко. К таким уравнениям относятся дифференциальные уравнения 1-го порядка; дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка; линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

## ***3.2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными***

Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx+f_2(x)\varphi_2(y)dy=0$$

называется ***дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными***.

Суть такого разделения сводится к тому, чтобы путем некоторых математических операций, произвести группировку переменных, производных, дифференциалов в отдельные слагаемые так, чтобы они содержали только один вид переменных. Слагаемые, включающие только одну переменную, можно получить, если дифференциальное уравнение разделить на $\varphi_1(y)f_2(x)$. Тогда получим:

$$\frac{f_1(x)\varphi_1(y)}{\varphi_1(y)f_2(x)}dx+\frac{f_2(x)\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)f_2(x)}dy=0$$

при условии, что $\varphi_1(y)f_2(x)\neq 0$. После сокращения получаем

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=0$$

Интегрируя это уравнение, мы получим общее решение дифференциального уравнения в виде:

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx=-\int\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy+C$$

Это выражение является общим решением приведенного уравнения.

*Пример 3.1*: Найти общее и частное решение дифференциального уравнения $y'=2xy$ при $x=0$, $y=2$.

*Решение:*

Перепишем уравнение иначе $\frac{dy}{dx}=2xy$ или $\frac{dy}{y}=2xdx$.

Интегрируя, получаем $\int\frac{dy}{y}=2\int xdx$ или $\ln y=x^2+C$.

Преобразуем полученное уравнение $\ln y=\ln e^{x^2}+\ln C$, $y=e^{x^2}\cdot C$ –общее решение.

Запишем частное решение данного уравнения исходя из начальных данных:

$$2=e^0\cdot C,\qquad C=2,$$

$y=2e^{x^2}$ – частное решение.

### *Общие правила решения дифференциальных уравнений*

1. Производные $y'$, входящие в уравнения, надо представить в виде дроби $\frac{dy}{dx}$.

2. С помощью алгебраических операций преобразовать уравнение так, чтобы члены, содержащие $y$, находились в левой части равенства, а члены, содержащие $x$, в правой.

3. Проинтегрировать полученное равенство в соответствии с правилами вычисления интегралов. При этом левая часть интегрируется по аргументу $y$, а правая по аргументу $x$. Постоянная интегрирования

$C$ добавляется в правую часть равенства после вычисления интеграла по $x$.

4. Полученное после интегрирования уравнение решается относительно $y$ (если нужно) и находится общее решение.

5. Подставляя в общее решение, значения $x$ и $y$ из начальных (дополнительных) условий, находят значение постоянной $C$ и вид частного решения.

В силу того, что постоянная интегрирования $C$ может быть какой угодно, ей часто придают вид наиболее удобный для решения уравнения. Рассмотрим два варианта введения $C$ при решении одного и того же дифференциального уравнения.

*Пример 3.2:* Найти общее и частное решения дифференциального уравнения $xy' = y$ при условии, что $y = 3$, если $x = 1$.

*Решение:*

Поступая в соответствии с правилами решения, получаем:

$$x\frac{dy}{dx} = y \quad \text{или} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Интегрируя, находим: $\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x}$ или $\ln y = \ln x + C$

Потенцируя, получаем общее решение: $y = e^{\ln x + C}$

Подставляя значения $y$ и $x$ из начальных условий, получаем $3 = e^{C}$, т.е. $C = \ln 3$.

Тогда частное решение будет иметь вид

$$y = e^{\ln x + \ln 3} = e^{\ln 3x} = 3x$$

Обращаем внимание на то, что произвольная постоянная $C$ в данном случае выражается через логарифм. Это позволяет в тех случаях, когда решение получается в логарифмической форме вводить $C$ сразу под знаком логарифма, то есть

$$\ln y = \ln x + \ln C = \ln Cx$$

Тогда общее решение будет иметь вид $y = Cx$

Подставляя значения $y$ и $x$ из начальных условий, получим значение $3 = C \cdot 1$, то есть $C = 3$ и частное решение будет $y = 3x$.

В итоге получается, что введение $C$ по второму варианту не изменяет существа решения, но делает его проще и удобнее для объяснения.

## *3.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка*

Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

называется ***однородным дифференциальным уравнением первого порядка***, если функция $f(x, y)$ может быть представлена как функция отношения своих аргументов: $f(x, y) = \varphi(y/x)$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y/x).$$

Однородное дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = \varphi(y/x)$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $u = y/x$, где $u$ – новая неизвестная функция. Произведя замену $y = xu$, мы придем к уравнению с разделяющимися переменными. Продифференцируем $y = xu$:

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx},$$

и уравнение $\frac{dy}{dx} = \varphi(y/x)$ примет вид

$$u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u) \qquad \text{или} \qquad xdu = (\varphi(u) - u)dx.$$

Разделим в последнем уравнении переменные:

$$\frac{du}{(\varphi(u) - u)} = \frac{dx}{x}.$$

Выполнив интегрирование, найдем

$$\int \frac{du}{(\varphi(u) - u)} = \int \frac{dx}{x} \qquad \text{или} \qquad \int \frac{du}{(\varphi(u) - u)} = \ln|x| + C$$

Взяв интеграл в левой части последнего равенства и выполнив обратную замену $u = y/x$, получим общее решение однородного уравнения $\frac{dy}{dx} = \varphi(y/x)$.

*Пример 3.3:* Решить однородное дифференциальное уравнение: $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$.

*Решение:*

Запишем исходное уравнение виде: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$. Поделив числитель и знаменатель правой части уравнения на $x^2$, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}.$$

Данное уравнение является однородным.
Для решения этого уравнения введем новую функцию $u = y/x$, откуда $y = xu$. Дифференцируя $y = xu$, получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ux) = u + x\frac{du}{dx}.$$

Подставим это выражение в последнее уравнение, получим:

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{u}.$$

Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными: $x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{u} - u$ или $x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}$, откуда $udu = \frac{dx}{x}$.

Интегрируя это уравнение, получим $\int udu = \int \frac{dx}{x}$ или $\ln x = \frac{u^2}{2} + \ln C$, откуда $\ln\frac{x}{C} = \frac{u^2}{2}$, т.е. $x = Ce^{\frac{u^2}{2}}$.

Выполнив обратную замену $u = y/x$, окончательно получим: $x = Ce^{\frac{y^2}{2x^2}}$. Это и есть общее решение.

## ***3.4. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка***

Дифференциальное уравнение вида $F(x, y, y', y'') = 0$, в которое входит вторая производная неизвестной функции $y = f(x)$, называют ***дифференциальным уравнением второго порядка.***

Рассмотрим уравнения второго порядка, которые могут быть записаны в виде, разрешенном относительно второй производной: $y'' = f(x, y, y')$.

Дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ имеет общее решение $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, содержащее две произвольные постоянные.

Рассмотрим некоторые виды дифференциальных уравнений второго порядка, приводимых к дифференциальным уравнениям первого порядка.

### *Дифференциальные уравнения второго порядка, не содержащие искомой функции и её производной*

Уравнение вида $y'' = f(x)$ называют ***дифференциальным уравнением второго порядка, не содержащим искомой функции и её про-***

***изводной***. Такие уравнения решаются двукратным интегрированием с введением новой функции, дающей возможность понизить их порядок.

Введем новую функцию $u(x)$, положив $y' = u(x)$, тогда $y'' = (y')' = u'(x)$, $u'(x) = f(x)$; или $\frac{du}{dx} = f(x)$. Разделив переменные и проинтегрировав, получим:

$$du = f(x)dx; \qquad \int du = \int f(x)dx; \qquad u(x) = \int f(x)\,dx + C_1$$

или

$$y' = \int f(x)\,dx + C_1; \qquad \frac{dy}{dx} = \int f(x)dx + C_1;$$

Снова разделим переменные и проинтегрируем:

$$dy = \left(\int f(x)dx + C_1\right)dx; \qquad \int dy = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx.$$

Таким образом, $y = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2$ – общее решение дифференциального уравнения $y'' = f(x)$.

<u>*Пример 3.4:*</u> Найти общее решение уравнения $y'' = x$.

*Решение:*

Обозначим $y' = u(x)$, тогда $y'' = (y')' = u'(x)$ и $u'(x) = x$ или $\frac{du}{dx} = x$.

Разделив переменные и проинтегрировав, найдем первую производную:

$$du = xdx; \qquad \int du = \int xdx; \qquad u = \frac{x^2}{2} + C_1$$

или

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Разделив в последнем уравнении переменные и проинтегрировав его, найдем саму функцию $y$:

$$dy = \frac{x^2}{2}dx + C_1dx; \qquad \int dy = \int \frac{x^2}{2}dx + \int C_1dx.$$

Таким образом, $y = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$ – общее решение уравнения, содержащее две произвольные постоянные $C_1$ и $C_2$.

<u>*Дифференциальные уравнения второго порядка, не содержащие искомой функции*</u>

Уравнение вида $y'' = f(x, y')$ называют ***дифференциальным уравнением второго порядка, не содержащим искомой функции***.

Введем новую функцию $y' = z(x)$, получим уравнение первого порядка относительно $z$:

$$z' = f(x, z).$$

Если решение этого уравнения $z=\varphi(x,C_1)$, то искомое решение получим, интегрируя равенство $y'=z$, т.е. $\frac{dy}{dx}=\varphi(x,C_1)$; $dy=\varphi(x,C_1)\,dx$; $\int dy=\int\varphi(x,C_1)dx$, откуда $y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$ – общее решение дифференциального уравнения $y''=f(x,y')$.

_Пример 3.5:_ Найдем общее решение уравнения $(1+x^2)y''-2y'x=0$.

*Решение:*

Это уравнение не содержит искомой функции *y*. Обозначим $y'=z(x)$, $y''=(y')'=z'(x)$, тогда

$$(1+x^2)z'-2zx=0 \qquad \text{или} \qquad (1+x^2)\frac{dz}{dx}-2zx=0$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим:

$$\frac{dz}{z}=\frac{2x}{1+x^2}dx; \qquad \int\frac{dz}{z}=\int\frac{2x}{1+x^2}dx; \qquad \ln|z|=\ln\left|1+x^2\right|+\ln|C_1|$$

Потенцируем последнее выражение: $z=(1+x^2)\cdot C_1$. Так как $z=y'$, то $y'=(1+x^2)\cdot C_1$ или $\frac{dy}{dx}=(1+x^2)\cdot C_1$. Разделив в последнем уравнении переменные и проинтегрировав его, найдем саму функцию *y*:

$$dy=C_1(1+x^2)dx; \qquad \int dy=\int C_1(1+x^2)dx, \qquad y=C_1\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2$$

Таким образом, $y=C_1\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2$ – общее решение уравнения, содержащее две произвольные постоянные $C_1$ и $C_2$.

## _Дифференциальные уравнения второго порядка, не содержащие аргумента_

Уравнение вида $y''=f(y,y')$ называют ***дифференциальным уравнением второго порядка, не содержащим явным образом аргумента***.

Для нахождения решения данного уравнения введем новую функцию $y'=p$, аргумент которой *y*: $y''=p'=\frac{dp}{dx}$. Из равенства $y'=\frac{dy}{dx}=p$ найдем $dx=\frac{dy}{p}$ и подставим в равенство $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p$. Подставив выражения $y''$ и $y'$ в уравнения $y''=f(y,y')$, получим $p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$.

Найдя решение последнего уравнения в виде $p=\varphi(y,C_1)$ или $\frac{dy}{dx}=\varphi(y,C_1)$.

Разделив переменные и проинтегрировав, получим: $\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=dx$;

$\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=\int dx$,

$$\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2 \text{ – общее решение уравнения } y''=f(y,y').$$

<u>*Пример 3.6:*</u> Найти общее решение уравнения $yy''+(y')^2=0$.

*Решение:*

Введем подстановку $y'=p=\frac{dy}{dx}$, откуда $dx=\frac{dy}{p}$. Так как $y''=\frac{dp}{dx}=p\cdot\frac{dp}{dy}$, то $yp\frac{dp}{dy}-p^2=0$ есть уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем уравнение:

$$ypdp-p^2dy=0, \qquad \frac{dp}{p}-\frac{dy}{y}=0, \qquad \int\frac{dp}{p}-\int\frac{dy}{y}=\ln C_1,$$

$$\ln p-\ln y=\ln C_1.$$

Потенцируя, получим $\frac{p}{y}=C_1$, откуда $p=C_1y$.

Подставляя вместо $p$ его значение $\frac{dy}{dx}$, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx}=C_1y, \qquad \frac{dy}{y}=C_1dx, \qquad \int\frac{dy}{y}=\int C_1dx, \qquad \ln y=C_1x+\ln C_2,$$

$$\ln y=\ln e^{C_1x}+\ln C_2.$$

Потенцируя, найдем общее решение в виде $y=C_2e^{C_1x}$

## <u>3.5. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами</u>

Уравнение вида: $y''+py'+qy=f(x)$, где $p$, $q$ – постоянные коэффициенты, а $f(x)$ – некоторая функция, называют ***линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами***.

Если $f(x)=0$ для всех $x$, то уравнение $y''+py'+qy=0$ называют ***линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами.***

Решение такого дифференциального уравнения, как показал Эйлер, следует искать в виде следующих функций: $y=e^{kx}$, где $\kappa$ – некоторый коэффициент. Подставим значения $y'=ke^{kx}$ и $y''=k^2e^{kx}$, найден-

ные из этой функции в уравнение. Тогда получим:
$k^2e^{kx}+pke^{kx}+qe^{kx}=0$ или $e^{kx}(k^2+pk+q)=0$ .

Для того чтобы функция $y=e^{kx}$ была решением дифференциального уравнения, достаточно, чтобы $k^2+pk+q=0$ . Это уравнение называют ***характеристическим уравнением*** и корни его определяются по формуле:

$$k_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

Для нахождения общих решений уравнения $y''+py'+qy=0$ воспользуемся теоремой.

Теорема. Пусть дано дифференциальное уравнение и его характеристическое уравнение $k^2+pk+q=0$ .

1) если корни $\kappa_1$ и $\kappa_2$ характеристического уравнения $k^2+pk+q=0$ – действительные и различные числа ($\kappa_1 \neq \kappa_2$), то все решения уравнения $y''+py'+qy=0$ даются формулой:

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x},$$

где $C_1$ и $C_2$ – произвольные постоянные.

2) если корни $\kappa_1$ и $\kappa_2$ характеристического уравнения $k^2+pk+q=0$ – действительные и равные числа $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, то все решения уравнения $y''+py'+qy=0$ даются в виде такой формулы:

$$y=(C_1x+C_2)e^{kx},$$

где $C_1$ и $C_2$ – произвольные постоянные.

3) если же корни $\kappa_1$ и $\kappa_2$ характеристического уравнения $k^2+pk+q=0$ – комплексные числа, т.е. $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, то все решения уравнения $y''+py'+qy=0$ даются такой формулой:

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x),$$

где $C_1$ и $C_2$ – произвольные постоянные.

Все приведенные выше три вида решений представляют собой общее решение ЛОДУ. Частные решения находят по заданным начальным условиям.

*Пример 3.7:* Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-4y'+3y=0$.

*Решение:*

Характеристическое уравнение:

$$k^2-4k+3=0$$

имеет корни $k_1=1$, $k_2=3$. Это действительные и различные числа. Согласно формуле $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$, общее решение уравнения имеет вид:

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{3x}.$$

*Пример 3.8:* Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 4y = 0$.

*Решение:*

Характеристическое уравнение:

$$k^2 + 4k + 4 = 0$$

имеет корни $k_1 = k_2 = -2$. Это действительные и равные числа.

Согласно формуле $y = (C_1x + C_2)e^{kx}$, общее решение уравнения имеет вид:

$$y = (C_1x + C_2)e^{-2x}.$$

*Пример 3.9:* Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 13y = 0$.

*Решение:*

Характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 13 = 0$$

имеет корни $k_1 = k_2 = 2 \pm 3i$. Это комплексные числа.

Согласно формуле $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, общее решение уравнения имеет вид:

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

## 3.6. Моделирование задач физико-химического, фармацевтического и медико-биологического содержания с помощью дифференциальных уравнений

Дифференциальные уравнения занимают важное место в решении задач физико-химического и медико-биологического содержания. Пользуясь ими, мы устанавливаем связь между переменными величинами, характеризующими данный процесс или явление.

### Прикладные задачи физики

### Закон радиоактивного распада атомов

Ядра атомов радиоактивных элементов с течением времени распадаются. Опытным путем установлено, что скорость распада пропорциональна числу не распавшихся в данный момент ядер атомов. В аналитической форме это можно записать так:

$$dN = -\lambda N dt,$$

где $N$ – число не распавшихся в данный момент ядер атомов; $t$ –время; $\lambda$ – постоянная распада. Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Знак минус берется потому, что с течением времени число нераспавшихся атомов уменьшается, а производная убывающей функции отрицательна. Скорость же по смыслу – положительная величина.

Установим зависимость числа нераспавшихся ядер атомов радиоактивного вещества от времени, если при $t = 0$ число нераспавшихся ядер атомов $N = N_0$.

Разделим переменные в уравнении $dN = -\lambda N dt$ и проинтегрируем левую часть по $N$, а правую – по $t$:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt; \qquad \int \frac{dN}{N} = -\int \lambda dt; \qquad \ln N = -\lambda t + \ln C;$$

$$\ln N = \ln e^{-\lambda t} + \ln C; \qquad N = Ce^{-\lambda t}.$$

Полагая в последнем уравнении $t = 0$ и $N = N_0$, находим $C = N_0$. Тогда $N = N_0 e^{-\lambda t}$

Формула $N = N_0 e^{-\lambda t}$ представляет закон радиоактивного распада, выраженный экспоненциальной функцией в интегральной Форме. График закона радиоактивного распада $N = N_0 e^{-\lambda t}$ приведен на рис 3.1:

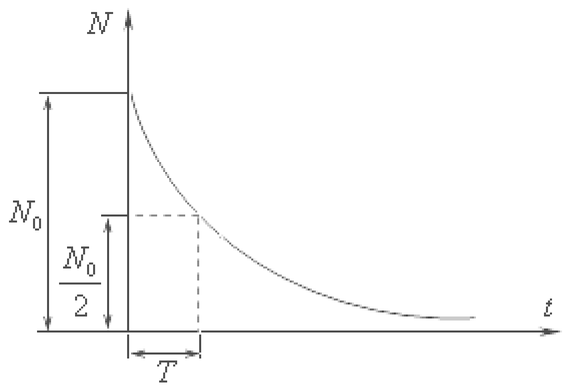


Рис.3.1

Из формулы $N = N_0 e^{-\lambda t}$ можно определить период полураспада $T$, т. е. время, в течение которого число ядер атомов уменьшается вдвое. Положив в формуле $N = N_0 e^{-\lambda t}$ $t = T$ и $N = \frac{N_0}{2}$, получим:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}; \qquad \frac{1}{2} = e^{-\lambda T}.$$

Прологарифмируем последнее выражение: $\ln\frac{1}{2} = -\lambda T$, откуда

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0{,}693}{\lambda}.$$

Из формулы $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$ видно, что период полураспада связан с постоянной распада и является характеристикой данного радиоактивного вещества. Например, для радона $\lambda = 2{,}084 \cdot 10^{-6} c^{-1}$. Подставив ее значение в формулу $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$, получим период полураспада радона $T = 3{,}15$ суток.

### *Закон поглощения света Бугера – Ламберта – Бера*

Пусть через слой раствора толщиной *l* проходит пучок параллельных лучей света (рис. 3.2). Выделим в растворе тонкий слой толщиной *dl*, ограниченный параллельными поверхностями, перпендикулярными к направлению распространения света. Интенсивность света, прошедшего через слой *dl*, изменится на величину *dI.* Изменение интенсивности света пропорционально интенсивности света *I*, концентрации вещества *c* и его толщине *dl*:

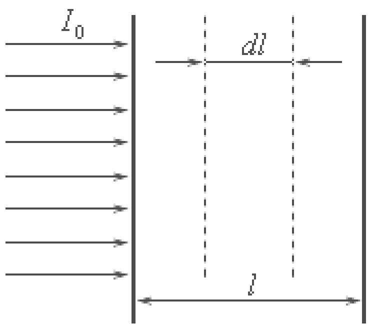


Рис 3.2

$$dI = -kIcdl$$

Коэффициент *k* зависит от свойств поглощающего вещества и носит название коэффициента поглощения. Постоянство коэффициента *k* указывает на то, что в каждом слое поглощается одна и та же доля интенсивности света, дошедшего до слоя. Коэффициент *k* зависит от длины волны света, от свойств растворителя и температуры. Уравнение $-dI = kIcdl$ является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем его:

$$\frac{dI}{I} = -kcdl; \qquad \int \frac{dI}{I} = -\int kcdl;$$

$$\ln I = -kcl + \ln C_1; \qquad \ln I = \ln e^{-kcl} + \ln C_1$$

Потенцируя, получим $I = C_1 e^{-kcl}$

Постоянную $C_1$ найдем из начальных условий: при $l = 0$, $I = I_0$:

$I_0 = C_1 e^{-kc \cdot 0}$, откуда $C_1 = I_0$ и $I = I_0 e^{-kcl}$.

Из формулы $I = I_0 e^{-kcl}$ найдем величину оптической плотности раствора *D*:

$$D = \lg \frac{I_0}{I} = kcl \lg e = kcl \cdot 0{,}4343,$$

где, *0,4343k=ε* носит название молярного коэффициента поглощения, и поэтому $D = \varepsilon cl = \lg \frac{I_0}{I}$.

Преобразовав последнее выражение, получим $I = I_0 10^{-\varepsilon cl}$.

Выражение $I = I_0 10^{-\varepsilon cl}$ представляет собой объединенный закон Бугера – Ламберта – Бера в интегральной форме.

### ***Закон поглощения ионизирующих излучений веществом***

На опыте установлено, что ослабление интенсивности излучения *dI* при прохождении его через слой вещества толщиной *dx* пропорционально интенсивности *I* излучения:

$$dI = -\mu I dx,$$

где μ – коэффициент поглощения вещества.

Разделяя переменные и интегрируя данное уравнение, имеем:

$$\frac{dI}{I} = -\mu dx; \qquad \int \frac{dI}{I} = -\int \mu dx;$$

$$\ln I = -\mu x + \ln C; \qquad \ln I = \ln e^{-\mu x} + \ln C.$$

Потенцируя последнее выражение, получим $I = Ce^{-\mu x}$.

Исходя из начальных условий: при $x = 0$, $I = I_0$, $C = I_0$ найдем $I = I_0 e^{-\mu x}$.

Из формулы $I = I_0 e^{-\mu x}$ видно, что интенсивность поглощения изменяется с толщиной поглощающего слоя по экспоненциальному закону.

## *Прикладные задачи химии*

Химическая кинетика занимается изучением механизма процесса и определением скорости, при которой система достигает равновесия. При определении скорости протекания процесса важно учесть влияние на нее таких факторов, как концентрация, температура, природа растворителя, присутствие катализатора.

В общем случае скорость химической реакции зависит от концентрации реагирующих веществ. Однако скорость реакции может зависеть также от концентрации других веществ не входящих в стехиометрическое уравнение. Уравнение, выражающее зависимость скорости реакции от концентрации каждого вещества, влияющего на скорость, называется кинетическим дифференциальным уравнением реакции. Рассмотрим химические процессы первого, второго и третьего порядка.

### ***Закон реакции первого порядка***

Скорость реакции первого порядка выражается уравнением

$$\upsilon = \frac{dc}{dt} = -kc,$$

где $c$ – концентрация реагирующего вещества; $t$ – время; $k$ — постоянная скорости реакции.

Знак минус в уравнении $\upsilon = \frac{dc}{dt} = -kc$ означает, что концентрация реагирующего вещества с течением времени убывает. Производная убывающей функции отрицательна, скорость имеет смысл положительной величины.

В дифференциальном уравнении $\upsilon = \frac{dc}{dt} = -kc$ разделим переменные и проинтегрируем его:

$$\frac{dc}{c} = -kdt; \qquad \int \frac{dc}{c} = -\int kdt; \qquad \ln|c| = -kt + \ln|C_1|;$$

$$\ln|c| = \ln e^{-kt} + \ln|C_1|; \qquad c = C_1 e^{-kt}.$$

Полагая при $t = 0$ и $c = c_0$, получаем $C_1 = c_0$, следовательно, $c = c_0 e^{-kt}$.

Таким образом, закон $c = c_0 e^{-kt}$ реакции первого порядка в интегральной форме выражается экспоненциальной функцией.

Пользуясь уравнением $c = c_0 e^{-kt}$, можно найти время, за которое концентрация исходного вещества уменьшается наполовину. Это время называют периодом полупревращения или полупериодом протекания реакции и обозначают $\tau$ или $\tau_{½}$.

Подставив значения $t = \tau$, $c = \frac{c_0}{2}$ в уравнение $c = c_0 e^{-kt}$, получим $\frac{c_0}{2} = c_0 e^{-k\tau}$, откуда $\frac{1}{2} = e^{-k\tau}$, $\ln\frac{1}{2} = -k\tau$, $\tau = \frac{\ln 2}{k} = \frac{0,693}{k}$.

Период полупревращения для реакции первого порядка не зависит от исходной концентрации вещества, и за равные промежутки времени расходуется одна и та же доля вещества.

### *Закон реакции второго порядка*

Для реакций второго порядка скорость реакции пропорциональна концентрации каждого из двух реагирующих веществ или квадрату концентрации одного из реагентов:

$$\upsilon = \frac{dc}{dt} = -kc_1 c_2.$$

Знак минус в уравнении означает, что концентрации реагирующих веществ с течением времени убывают.

Если $c_1 = c_2 = c$, то

$$\frac{dc}{dt} = -kc^2.$$

Уравнение $\frac{dc}{dt} = -kc^2$ есть дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем его:

$$\frac{dc}{c^2} = -kdt; \qquad \int\frac{dc}{c^2} = -\int kdt; \qquad -\frac{1}{c} = -kt + C_1.$$

Определим постоянную $C_1$ из условия, что при $t = 0$ и $c = c_0$: $-\frac{1}{c_0} = C_1$. Подставив значение $C_1$ в последнее уравнение, получим

$-\frac{1}{c} = -kt - \frac{1}{c_0}$ или $\frac{1}{c} - \frac{1}{c_0} = kt$, откуда $k = \frac{1}{t}\frac{c_0 - c}{c_0 c}$.

Период полупревращения для реакции второго порядка при $t = \tau$, $c = \frac{c_0}{2}$ равен $\tau = \frac{1}{kc_0}$.

### *Закон реакции третьего порядка*

Для реакций третьего порядка скорость реакции пропорциональна концентрации каждого из трех реагирующих веществ или кубу концентрации одного из реагентов:

$$\upsilon = \frac{dc}{dt} = -kc_1c_2c_3 .$$

Знак минус в уравнении означает, что концентрации реагирующих веществ с течением времени убывают.

Если $c_1 = c_2 = c_3 = c$, то

$$\frac{dc}{dt} = -kc^3 .$$

Уравнение $\frac{dc}{dt} = -kc^3$ есть дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем его:

$$\frac{dc}{c^3} = -kdt ; \qquad \int \frac{dc}{c^3} = -\int kdt ; \qquad -\frac{1}{2c^2} = -kt + C_1 .$$

Определим постоянную $C_1$ из условия, что при $t = 0$ и $c = c_0$:

$$-\frac{1}{2c_0{}^2} = C_1 .$$

Подставив значение $C_1$ в последнее уравнение, получим

$$-\frac{1}{2c^2} = -kt - \frac{1}{2c_0{}^2} \text{ или } \frac{1}{2c^2} - \frac{1}{2c_0{}^2} = kt ,$$

откуда

$$k = \frac{1}{2t}\frac{c_0{}^2 - c^2}{c_0{}^2c^2} .$$

Период полупревращения для реакции третьего порядка при $t = \tau$, $c = \frac{c_0}{2}$ равен $\tau = \frac{3}{2kc_0{}^2}$.

## <u>*Прикладные задачи фармации, биологии и медицины*</u>

### *Закон размножения бактерий с течением времени*

Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству бактерий в данный момент. Найти зависимость изменения количества бактерий от времени.

Обозначим количество бактерий, имеющихся в данный момент, через $x$. Тогда

$$\frac{dx}{dt} = kx ,$$

где $k$ – коэффициент пропорциональности.

В уравнении $\frac{dx}{dt} = kx$ разделим переменные и проинтегрируем его:

$$\frac{dx}{x} = kdt; \qquad \int \frac{dx}{x} = k\int dt;$$

$$\ln|x| = kt + \ln|C|; \qquad \ln|x| = \ln e^{kt} + \ln|C|.$$

Потенцируем последнее выражение: $x = Ce^{kt}$. Полагая, что при $t = 0$ и $x = x_0$, получим $C = x_0$. Следовательно, $x = x_0 e^{kt}$.

Уравнение $x = x_0 e^{kt}$ выражает закон размножения бактерий с течением времени. Таким образом, при благоприятных условиях увеличение бактерий с течением времени происходит по экспоненциальному закону.

*Этот закон представляет интерес не только с теоретической, но и с практической точки зрения. Он говорит о том, что создавая для полезной популяции благоприятные условия, можно очень быстро получить популяцию с большой численностью. Весьма показательна в этом смысле история с пенициллином. Когда был открыт этот антибиотик, грибки, его выделяющие, стали выращивать в наилучших условиях. Их неограниченно подкармливали, следили, чтобы им не было тесно, и, конечно, оберегали от вредных видов. Будущий урожай можно было совершенно точно подсчитать по формуле. Размножаясь в соответствии с экспоненциальным законом, пенициллиновые грибки в короткий срок обеспечили весь мир ценным лекарством.*

*Экспоненциальному закону размножения подчиняется так называемый «экологический взрыв», когда тот или иной биологический вид, попав в благоприятные условия, за короткий срок достигает большой численности. Для примера можно указать на губительные нашествия полчищ насекомых (саранчи, шелкопряда и др.) или на неожиданные последствия акклиматизации кроликов в Австралии.*

### *Закон роста клеток с течением времени*

Для палочковидных клеток, у которых отношение поверхности клетки к ее объему сохраняется постоянным, скорость роста клетки $\frac{dl}{dt}$ пропорциональна длине клетки *l* в данный момент:

$$\frac{dl}{dt} = (\alpha - \beta)l,$$

где α и β – постоянные, характеризующие процессы синтеза и распада.

В уравнении $\frac{dl}{dt} = (\alpha - \beta)l$ разделим переменные и проинтегрируем его:

$$\frac{dl}{l} = (\alpha - \beta)dt; \quad \int \frac{dl}{l} = \int (\alpha - \beta)dt; \quad \ln|l| = (\alpha - \beta)t + \ln|C|;$$

$$\ln|l| = \ln e^{(\alpha - \beta)t} + \ln|C|; \qquad l = Ce^{(\alpha - \beta)t}.$$

При $t=0$ и $l=l_0$, получим $C=l_0$. Следовательно, $l=l_0e^{(\alpha-\beta)t}$, т.е. рост палочковидных клеток происходит по экспоненциальному закону.

### *Закон разрушения клеток в звуковом поле*

Ультразвуковые колебания, распространяясь в суспензии бактериальных клеток, водорослей или эритроцитов создают в жидкой дисперсионной среде переменное давление. При отрицательном давлении (разрежение) в интенсивном ультразвуковом поле происходит разрыв жидкости и образование микрополостей, пузырьков или каверн (кавитация). Во время полупериода сжатия кавитационные пузырьки захлопываются, возникает ударная волна, которая разрушает клетки.

В очень широком диапазоне частот относительные скорости разрушения биологических клеток различных видов остаются постоянными. Эти скорости могут характеризовать относительную прочность клеток различных видов. Чтобы выразить это количественно, нужно определить скорость разрушения клетки в постоянном звуковом поле. Изучение этого вопроса показывает, что, пока по крайней мере 1% популяции остается неразрушенным, можно написать, что:

$$\frac{dN}{dt}=-RN,$$

где N – концентрация клеток; t — время; R— постоянная.

Разделим в уравнении $\frac{dN}{dt}=-RN$ переменные и проинтегрируем его:

$$\frac{dN}{N}=-Rdt\,; \qquad \int\frac{dN}{N}=-\int Rdt\,; \qquad \ln|N|=-Rt+\ln|C|\,;$$

$$\ln|N|=\ln e^{-Rt}+\ln|C|\,; \qquad N=Ce^{-Rt}.$$

Постоянную $C$ найдем из условия, что при $t=0$ и $N=N_0$, получим $C=N_0$.

Тогда $N=N_0e^{-Rt}$, т.е. разрушение клеток в постоянном звуковом поле происходит по экспоненциальному закону.