ТЕМА №4
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ПРОГРАММНЫЕ ВОПРОСЫ:

4.1. Основные понятия теории вероятностей.
4.2. Виды случайных событий.
4.3. Статистическое и классическое определение вероятности.
4.4. Теоремы сложения вероятностей для совместных и несовместных событий. Произведение событий. Формула полной вероятности.
4.5. Повторные независимые испытания. Формула Байеса.
4.6. Формула Бернулли, локальная и интегральная теоремы Лапласа. Закон Пуассона.

4.1. Основные понятия теории вероятностей

Теория вероятностей – область математики, изучающая закономерности в случайных явлениях. ***Случайное явление*** – это явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта может протекать каждый раз несколько по-иному.

Очевидно, что в природе нет ни одного явления, в котором не присутствовали бы в той или иной мере элементы случайности, но в различных ситуациях мы учитываем их по-разному. Так, в ряде практических задач ими можно пренебречь и рассматривать вместо реального явления его упрощенную схему – «модель», предполагая, что в данных условиях опыта явление протекает вполне определенным образом. При этом выделяются самые главные, решающие факторы, характеризующие явление. Именно такая схема изучения явлений чаще всего применяется в физике, технике, механике. Именно так выявляется основная закономерность, свойственная данному явлению и дающая возможность предсказать результат опыта по заданным исходным условиям.

Однако описанная классическая схема так называемых точных наук плохо приспособлена для решения многих задач, в которых многочисленные, тесно переплетающиеся между собой случайные факторы играют заметную (часто определяющую) роль. Здесь на первый план выступает случайная природа явления, которой уже нельзя пренебречь. Это явление необходимо изучать именно с точки зрения закономерностей, присущих ему как случайному явлению. В физике примерами таких явлений служат броуновское движение, радиоактивный распад, ряд квантово-механических процессов и др.

Предмет изучения биологов и медиков – живой организм, зарождение, развитие и существование которого определяется очень многими и разнообразными, часто случайными внешними и внутренними факторами. Именно поэтому явления и события живого мира во многом тоже случайны по своей природе.

Элементы неопределенности, сложности, многопричинности, присущие случайным явлениям, обусловливают необходимость создания специальных математических методов для изучения этих явлений. Разработка таких методов, установление специфических закономерностей, свойственных случайным явлениям, – ***главные задачи теории вероятностей.***

Рассмотрим основные понятия теории вероятностей.

Исходным понятием теории вероятностей является *испытание.*

Испытанием называется осуществление некоторого определенного комплекса условий, который может быть воспроизведен сколь угодно большое число раз.

Организация одних испытаний зависит от нас самих (например, подбрасывание монеты или игрального кубика, извлечение шаров из ящика), организация других – нет (например, простое наблюдение за средней температурой данного дня года, проводимое в течение многих лет).

Пусть каждое испытание может привести или не привести к некоторому исходу, результату. Исход испытания называется ***событием***.

Например, стрелок стреляет по мишени, разделенной на четыре области. Выстрел – это испытание. Попадание в определенную область мишени – событие.

Случайным событием называется всякий факт, который в результате опыта (испытания) может произойти или не произойти.

Различные случайные события обозначаются латинскими буквами $A, B, C, ...$

Например, событие A – появление герба при бросании монеты; событие B – попадание в цель при выстреле; событие C – появление цветного шара при извлечении шаров из ящика.

Случайные события зависят от многих причин, имеющих между собой отдаленную связь, проследить которую мы не можем. Так, при бросании игрального кубика мы не знаем заранее, какая из граней окажется сверху, так как это зависит от очень многих обстоятельств (движения руки, положения игрального кубика в момент броска, особенностей поверхности, на которую падает кубик, и т. д.).

4.2. Виды случайных событий

Пусть производится опыт, который имеет ряд возможных событий (исходов): $A, B, C, \ldots$ и т. д.

1. Единственно возможные события. События A, B, C называются единственно возможными, если в результате каждого испытания хотя бы одно из них наверное наступит. Говорят также, что рассматриваемые события образуют полную группу событий.

Пример 4.1: При бросании игрального кубика единственно возможные события, состоящие в выпадении одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков, образуют полную группу событий.

2. События несовместные. События называются несовместными, если в результате опыта появление одного из них, исключает появление остальных событий.

Пример 4.2: В ящике находится пять шаров, помеченных номерами: 1, 2, 3, 4, 5. При извлечении шара вскроется только один из пяти номеров, значит, события, состоящие в появлении этого номера при дальнейшем извлечении шаров из ящика, являются несовместными.

3. События совместные. Два события называются совместными, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Пример 4.3: При бросании игрального кубика событие A – появление четырех очков, событие B – появление четного числа очков. В этом случае события A и B совместные.

4. События равновозможные. События называются равновозможными, если при испытании не существует никаких объективных причин, вследствие которых одно из них могло бы наступать чаще, чем другое.

Пример 4.4: Появление герба или решки при бросании монеты – события равновозможные. Но если в ящике находится восемь белых и два черных шара, то появления белого или черного шара не могут быть событиями равновозможными. Они носят название событий неравновозможных.

Единственно возможные, несовместные и *равновозможные события* называются ***случаями.***

5. Достоверные события. Событие называется достоверным, если оно в данном опыте непременно произойдет.

Пример 4.5: Достоверное событие – появление белого шара из урны, содержащей только белые шары.

6. Невозможные события. Событие называется невозможным, если оно заведомо не может произойти. Все невозможные события равносильны между собой.

Пример 4.6: Невозможное событие – извлечение красного шара из урны, содержащей только белые и черные шары.

4.3. Статистическое и классическое определение вероятности

Классическое определение вероятности

Вероятность – одно из основных понятий теории вероятностей. Существует несколько определений этого понятия.

Рассмотрим пример. Пусть в урне содержится 6 одинаковых, тщательно перемешанных шаров, причем 2 из них – красные, 3 – синие и 1 – белый. Очевидно, возможность вынуть наудачу из урны цветной (т. е. красный или синий) шар больше, чем возможность извлечь белый шар. Можно ли охарактеризовать эту возможность числом? Оказывается, можно. Это число и называют вероятностью события (появления цветного шара). Таким образом, вероятность есть число, характеризующее степень возможности появления события.

Поставим перед собой задачу дать количественную оценку возможности того, что взятый наудачу шар цветной. Появление цветного шара будем рассматривать в качестве события A. Каждый из возможных результатов испытания (испытание состоит в извлечении шара из урны) назовем ***элементарным исходом (элементарным событием)***. Элементарные исходы обозначим через ω_1, ω_2, ω_3 и т. д. В нашем примере возможны следующие 6 элементарных исходов: ω_1 – появился белый шар; ω_2, ω_3 – появился красный шар; ω_4, ω_5, ω_6 – появился синий шар.

Те элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает, назовем благоприятствующими этому событию. В нашем примере благоприятствуют событию A (появлению цветного шара) следующие 5 исходов: ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6.

Таким образом, событие A наблюдается, если в испытании наступает один, безразлично какой, из элементарных исходов, благоприятствующих A; в нашем примере A наблюдается, если наступит ω_2 или ω_3 или ω_4, или ω_5 или ω_6.

Отношение числа благоприятствующих событию A элементарных исходов к их общему числу называют ***вероятностью события A*** и обозначают через ***P(A).*** В рассматриваемом примере всего элементарных исходов 6; из них 5 благоприятствуют событию A. Следовательно, вероятность того, что взятый шар окажется цветным, равна $P(A)=\frac{5}{6}$. Это число и дает ту количественную оценку степени возможности появления цветного шара, которую мы хотели найти. Дадим теперь определение вероятности.

Вероятностью события А называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Итак, вероятность события *А* определяется формулой

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где *m* – число случаев благоприятствующих появлению события A; *n* – общее число всех равновозможных случаев.

Здесь предполагается, что элементарные исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице. Действительно, для достоверного события U $m = n$, следовательно $P(U) = \frac{n}{n} = 1$

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю. Для невозможного события V $m = 0$, откуда $P(V) = \frac{0}{n} = 0$.

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей. Действительно, любому событию благоприятствует число элементарных событий m, удовлетворяющих неравенству $0 \le m \le n$. Следовательно $0 \le P(A) \le 1$

Пример 4.7: Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найдем вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение:

Обозначим через *А* событие – набрана нужная цифра. Абонент мог набрать любую из 10 цифр, поэтому общее число возможных элементарных исходов равно 10. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию *А* лишь один исход (нужная цифра лишь одна). Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов

$$P(A) = \frac{1}{10}.$$

Статистическое определение вероятности

При рассмотрении классического определения вероятности предполагалось, что случайные события равновозможны. Обычно о равновозможности случайных событий судят исходя из соображений симметрии. Например, при бросании игрального кубика предполагают, что он имеет форму правильного куба. Однако таких задач на практике встречается весьма мало. Поэтому в естественнонаучных и технических вопросах пользуются так называемым статистическим определением вероятности.

Допустим, что имеется возможность неограниченного повторения испытаний, в каждом из которых при сохранении неизменных условий отмечается появление или непоявление некоторого события A (бросание монеты, извлечение шара из урны, стрельба по цели).

Пусть при достаточно большом числе n испытаний интересующее нас событие A произошло m раз. Отношение

$$P^*(A) = \frac{m}{n}$$

называется ***относительной частотой события A*** в данной серии испытаний или просто ***частотой события A***.

Частоту события иначе называют его ***статистической вероятностью.***

Несмотря на внешнее сходство, формулы $P(A) = \frac{m}{n}$ и $P^*(A) = \frac{m}{n}$ различны по существу. Первая формула служит для теоретического вычисления вероятности события по заданным условиям опыта. Вторая же – для экспериментального определения частоты события; чтобы ею воспользоваться, необходим опытный, статистический материал.

Между частотой события и его вероятностью существует некоторая связь: ясно, что более вероятные события происходят чаще, чем маловероятные.

Практически невозможным событием называется событие, вероятность которого весьма близка к нулю, но не равна нулю.

Практически достоверным называется событие, вероятность которого весьма близка к единице, но не равна единице.

4.4. Теоремы сложения вероятностей для совместных и несовместных событий. Произведение событий. Формула полной вероятности

Теоремы сложения для несовместных событий

Суммой или ***объединением*** двух событий A и B называется такое событие C, которое состоит или в осуществлении события A, или события B, или событий A и B вместе.

Сумма событий обозначается как $C = A + B$ или $C = A \cup B$.

Суммой любого числа событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называется событие C, которое состоит в осуществлении хотя бы одного из этих событий.

Например, если из орудия произведены два выстрела и A – попадание при первом выстреле, B – попадание при втором выстреле, то $A+B$ – попадание при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах.

Разностью событий A и B называется событие C, состоящее в том, что в результате испытания произошло событие A и одновременно не произошло событие B.

Разность событий обозначается как $C = A - B$.

<u>*Теорема 4.1 (сложения).*</u> Вероятность события, состоящего в том, что осуществляется событие A или несовместное с ним событие B, равна сумме вероятностей этик событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

<u>*Следствие.*</u> Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

<u>*Теорема 4.2*</u>. Сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице.

Противоположными называют два единственно возможных события, образующих полную группу. Если одно из двух противоположных событий обозначено через A, то другое принято обозначать $\overline{A}$.

Например, попадание и промах при выстреле по цели – противоположные события. Если A – попадание, то $\overline{A}$ – промах.

<u>*Замечание.*</u> Если вероятность одного из двух противоположных событий обозначена через p, то вероятность другого события обозначают через q. Таким образом, в силу предыдущей теоремы

$$p + q = 1$$

<u>*Пример 4.8:*</u> Вероятность того, что день будет дождливым, $p = 0{,}7$. Найдем вероятность того, что день будет ясным. События «день дождливый» и «день ясный» – противоположные, поэтому искомая вероятность

$$q = 1 - p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3.$$

<u>*Теорема 4.3*</u>. Сумма вероятностей несовместных событий, образующих полную систему равна единице.

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$$

<u>*Умножение вероятностей независимых событий*</u>

Для рассмотрения последующих теорем необходимо ввести понятия зависимых и независимых событий.

Событие A называется ***независимым*** от события B, если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет.

Несколько событий называются ***независимыми в совокупности***, если каждое из них и любая комбинация остальных событий есть события независимые.

Несколько событий называются ***попарно независимыми***, если любые два из этих событий независимы.

Например, если монета брошена 2 раза, вероятность появления герба в первом испытании (событие A) не зависит от появления или непоявления герба во втором испытании (событие B). В свою очередь вероятность выпадения герба во втором испытании не зависит от результата первого испытания. Такие события A и B будут независимыми.

Произведением или пересечением (совмещением) двух событий A и B называется событие C, которое состоит в осуществлении и события A и события B.

Произведение событий обозначается как $C = A \cdot B$

Например, если A – деталь годная, B – деталь окрашенная, то AB– деталь годна и окрашена.

Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Например, если A, B, C – появление «герба» соответственно в первом, втором и третьем бросаниях монеты, то ABC – выпадение «герба» во всех трех испытаниях.

<u>*Теорема 4.4.*</u> Вероятность сложного события, состоящего из совпадения двух независимых событий, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

<u>*Пример 4.9:*</u> Медицинская сестра обслуживает в палате четырех больных. Вероятность того, что в течение часа первый больной потребует внимания сестры, $P(A) = 0{,}2$, второй больной – $P(B) = 0{,}3$, третий больной – $P(C) = 0{,}25$, четвертый больной – $P(D) = 0{,}1$. Найти вероятность того, что в течение часа все больные потребуют к себе внимания сестры.

Решение:

Считая требования больных независимыми друг от друга, по теореме умножения и находим, что искомая вероятность

$$P(ABCD) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot P(D) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}1 = 0{,}0015.$$

Вероятность осуществления хотя бы одного события

Вероятность появления (наступления) события *А*, состоящего в появлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, ..., A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением, вероятностей противоположных событий $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_n}$:

$$P(A) = 1 - \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot ... \cdot \overline{A_n} \qquad \text{или} \qquad P(A) = 1 - q_1 q_2 ... q_n$$

В частности, если все события имеют одинаковую вероятность, равную *p,* то вероятность появления хотя бы одного из этих событий

$$P(A) = 1 - q^n$$

Пример 4.10: Медсестра обслуживает четырех больных. Вероятность того, что в течение часа первый больной потребует внимания медсестры, равна $p_1 = 0{,}7$; второй – $p_2 = 0{,}6$; третий – $p_3 = 0{,}5$; четвертый – $p_4 = 0{,}4$. Найти вероятность того, что хотя бы один больной в течение часа потребует внимания медсестры.

Решение:

Вероятности того, что больные не потребуют внимания медсестры в течение часа равны:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3;$$

$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4;$$

$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5;$$

$$q_4 = 1 - p_4 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6.$$

Искомую вероятность находим по формуле $P(A) = 1 - q_1 q_2 ... q_n$:

$$p = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}964$$

Зависимые события. Условная вероятность.
Теорема умножения вероятностей зависимых событий.

Событие *В* называется ***зависимым*** от события *А*, если вероятность события *В* меняется в зависимости от того, произошло событие *А* или нет.

Во введении случайное событие определено как событие, которое при осуществлении совокупности условий *S* может произойти или не произойти. Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме условий S, не налагается, то такую вероятность называют ***безусловной****;* если же налагаются и другие дополнительные условия, то вероятность события называют ***условной***. Например, часто вычисляют вероятность события *В* при дополнительном условии, что произошло событие *А*.

Вероятность события *B*, вычисленная при условии, что имело место событие *A*, называется ***условной вероятностью события B*** и обозначается как $P_A(B)$ или $P(B/A)$.

<u>*Пример 4.11:*</u> В урне два белых шара и один черный. Пусть появление белого шара при первом извлечении будет событием *A,* при втором извлечении – событием *B.* При первом извлечении шара вероятность события *A* $P(A)=2/3$. Шары после извлечения в урну не возвращаются. Найти вероятность события *B* при условии, что: 1) событие *A* произошло; 2) событие *A* не произошло.

Решение:

1) Если событие *A* произошло, то условная вероятность события *B* $P(B/A)=1/2$.

2) Если известно, что событие *A* не произошло, то условная вероятность события *B* $P(B/A)=2/2=1$.

<u>*Теорема 4.5.*</u> Вероятность сложного события, состоящего из совпадения двух зависимых между собою событий, равна произведению вероятности одного из событий на условную вероятность другого в предположении, что первое событие имело место:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A).$$

<u>*Следствие.*</u> Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C).$$

Заметим, что порядок, в котором расположены события, может быть выбран любым, т. е. безразлично какое событие считать первым, вторым и т. д.

<u>*Пример 4.12:*</u> Студент пришел на экзамен, зная лишь 40 из 50 вопросов программы. В билете три вопроса. Найти вероятность того, что студент ответит на первый вопрос билета – событие *A,* на второй вопрос билета – событие *B* и на третий вопрос билета – событие *C*.

Решение:

Вероятность того, что студент ответит на первый вопрос $P(A) = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$; вероятность того, что студент ответит на второй вопрос, вычисленная при условии, что он ответил на первый вопрос, т. е. условная вероятность, равна $P(B/A) = \frac{39}{49}$; вероятность того, что студент ответит на третий вопрос билета в предположении, что он ответил на первый и второй вопрос, т. е. условная вероятность, равна $P(C/AB)=\frac{38}{48}=\frac{19}{24}$.

Тогда искомая вероятность

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/AB)=\frac{4}{5}\cdot\frac{39}{49}\cdot\frac{19}{24}\approx 0{,}5\,.$$

Формула полной вероятности.

Следствием теоремы 4.3 сложения вероятностей для несовместных событий и теоремы 4.5 умножения вероятностей для зависимых событий является так называемая *формула полной вероятности*.

Пусть некоторое событие A может произойти при условии, что появляется одно из несовместных событий $A_1, A_2, ..., A_n$, образующих полную систему.

Теорема 4.6. Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $A_1, A_2, ..., A_n$, образующих полную систему, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A/A_1)+P(A_2)\cdot P(A/A_2)+...+P(A_n)\cdot P(A/A_n)$$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\cdot P(A/A_i)\,.$$

Формулу называют ***формулой полной вероятности***.

Пример 4.13: Даны три одинаковые на вид аптечки. В первой аптечке находится 2 тюбика кодеина и 2 тюбика фталазола, во второй – 4 тюбика кодеина и 2 тюбика фталазола, в третьей 5 тюбиков кодеина и 3 тюбика фталазола. Выбирают наудачу одну из аптечек и вынимают из нее тюбик. Найти вероятность того, что вынутый тюбик будет тюбиком кодеина.

Решение:

Здесь событие A – появление тюбика кодеина – может произойти с одним из событий: A_1 – выбор первой аптечки, A_2 – выбор второй аптечки, A_3 – выбор третьей аптечки.

Выбор каждой аптечки равновозможен, поэтому

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3}$$

Условные вероятности события A при событиях A_1, A_2 и A_3 соответственно равны

$$P(A/A_1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\qquad P(A/A_2)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\qquad P(A/A_3)=\frac{5}{8}.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A/A_1)+P(A_2)\cdot P(A/A_2)+P(A_3)\cdot P(A/A_3)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8}\approx 0{,}6$$

т. е. вероятность того, что вынутый тюбик будет тюбиком кодеина, равна 0,6

4.5. Повторные независимые испытания. Формула Байеса

Некоторые сведения из комбинаторики. Перестановки, размещения, сочетания

Комбинаторика изучает способы подсчета числа элементов в различных множествах. К этому подсчету сводятся многие практические и теоретические задачи. Комбинаторные методы применяются в теории вероятностей, статистике, экономике, физике, химии, биологии и других науках.

Рассмотрим наиболее употребительные формулы комбинаторики.

Перестановки.

Пусть M – некоторое конечное множество, состоящее из n элементов:

$$M=\{a, b, c,...,l\}.$$

Перестановкой называется всякое расположение элементов данного конечного множества, получающееся при некотором упорядочении этого множества.

Упорядочить множество – значит выбрать какой-либо элемент этого множества и назвать его первым, выбрать какой-либо другой элемент и назвать его вторым и т. д., а последний элемент назвать n.

Число перестановок из n элементов равно произведению первых n натуральных чисел, т. е.

$$P_n=1\cdot 2\cdot 3\cdot (n-1)n=n!$$

Произведение n первых натуральных чисел обозначают через n! (читается: «эн факториал»).

$$n!=(n-1)!n$$

Пример 4.14: Сколькими способами можно разместить 7 больных в палате, насчитывающей 7 коек.

Решение:

Число способов равно $7!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7=5040$

Размещения.

Число упорядоченных множеств по m элементов, которые можно образовать из элементов множества, содержащего n элементов, называется размещением из n по m. Это число обозначается через A_n^m (читается: «А из n по m»).

Число размещений из n по m вычисляется по формуле

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1)$$

<u>*Пример 4.15:*</u> Найти количество всех трехзначных чисел, состоящих из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Решение:

$A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot (9-3+1) = 504$

<u>*Сочетания.*</u>

Пусть множество M содержит n элементов. Число подмножеств множества M, состоящих из m элементов (безразлично в каком порядке выбираются элементы), называется сочетанием из n по m и обозначается символом C_n^m.

Основная формула для вычисления числа сочетаний из n элементов, взятых по m, $0<m<n$, имеет вид

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Иногда при вычислении числа C_n^m удобнее пользоваться формулой

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{m!} = \frac{A_n^m}{m!}$$

Некоторые свойства числа сочетаний:

1. $C_n^{n-m} = C_n^m$

2. Сумма $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$

3. $C_n^{m+1} = \dfrac{n-m}{m+1} C_n^m$

4. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$

<u>*Пример 4.16:*</u> Найти число равновозможных случаев распределения пяти лотерейных билетов среди 25 студентов.

Решение:

Число всех равновозможных случаев распределения 5 билетов среди 25 студентов равно числу сочетаний из 25 элементов по 5, т. е.

$$C_{25}^5 = \frac{25!}{5!20!} = 53130$$

Числа A_n^m, P_n и C_n^m связаны соотношением $A_n^m = P_m \cdot C_n^m$

<u>*Формула Байеса*</u>

Если вероятность совместного появления зависимых событий A и B не зависит от того, в каком порядке они происходят, то $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$. В этом случае условную вероятность одного из событий можно найти, зная вероятности обоих событий и условную вероятность второго:

$$P(B/A)=\frac{P(B)\cdot P(A/B)}{P(A)}.$$

Обобщением данной формулы на случай многих событий является формула Байеса.

Пусть n несовместных случайных событий $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу событий. Вероятности этих событий – $P(A_1), P(A_2), ..., P(A_n)$ – известны и, так как они образуют полную группу, то $\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1$.

Некоторое случайное событие A связано с событиями $A_1, A_2, ..., A_n$. Причем известны условные вероятности появления события A с каждым из событий A_i, т.е. известны $P(A/A_1), P(A/A_2), ..., P(A/A_n)$. При этом сумма условных вероятностей $P(A/A_i)$ может быть не равна единице, т.е. $\sum_{i=1}^{n} P(A/A_i)\neq 1$. Тогда условная вероятность появления события A_i при реализации события A (т.е. при условии, что событие A произошло) определяется формулой Байеса:

$$P(A_i/A)=\frac{P(A_i)\cdot P(A/A_i)}{P(A_1)\cdot P(A/A_1)+P(A_2)\cdot P(A/A_2)+...+P(A_n)\cdot P(A/A_n)}.$$

Причем для этих условных вероятностей $\sum_{i=1}^{n} P(A_i/A)=1$.

Формула Байеса нашла широкое применение не только в математике, но и в медицине. Например, она используется для вычисления вероятности тех или иных заболеваний. Так, если $A_1, A_2, ..., A_n$ – предполагаемые диагнозы для данного пациента, A – некоторый признак, имеющий отношение к ним (симптом, определенный показатель анализа крови или мочи, деталь рентгенограммы и т.д.), а условные вероятности $P(A/A_i)$ проявления этого признака при каждом диагнозе A_i $(i=1,2,...n)$ заранее известны, то формула Байеса позволяет вычислить условные вероятности заболеваний (диагнозов) $P(A_i/A)$ после того как установлено, что характерный признак присутствует у пациента.

<u>*Пример 4.17:*</u> При первичном осмотре больного предполагаются 3 диагноза – A_1, A_2, A_3. Их вероятности, по мнению врача, распределяются так: $P(A_1)=0{,}5$; $P(A_2)=0{,}17$; $P(A_3)=0{,}33$. Следовательно, предварительно наиболее вероятным кажется первый диагноз. Для его уточнения назначается, например, анализ крови, в котором ожидается увеличение СОЭ (событие A). Заранее известно (на основании результа-

тов исследований), что вероятности увеличения СОЭ при предполагаемых заболеваниях равны: $P(A/A_1)=0{,}1$; $P(A/A_2)=0{,}2$; $P(A/A_3)=0{,}9$.

В полученном анализе зафиксировано увеличение СОЭ (событие A произошло). Тогда расчет по формуле Байеса дает значения вероятностей предполагаемых заболеваний при увеличенном значении СОЭ: $P(A_1/A)=0{,}13$; $P(A_2/A)=0{,}09$; $P(A_3/A)=0{,}78$

Эти цифры показывают, что с учетом лабораторных данных наиболее реален не первый, а третий диагноз, вероятность которого теперь оказалась достаточно большой.

Приведенный пример – простейшая иллюстрация того, как с помощью формулы Байеса можно формализовать логику врача при постановке диагноза и благодаря этому создать методы компьютерной диагностики.

Пример 4.18: Определите вероятность, оценивающую степень риска перинатальной[1] смертности ребенка у женщин с анатомически узким тазом.

Решение:

Пусть событие A_1 – благополучные роды; согласно клиническим отчетам, $P(A_1)=0{,}975=97{,}5\%$, тогда, если A_2 – факт перинатальной смертности, то $P(A_2)=1-0{,}975=0{,}025=2{,}5\%$

Обозначим A – факт наличия узкого таза у роженицы. Из проведенных исследований известны: а) $P(A/A_1)$ – вероятность узкого таза при благоприятных родах, $P(A/A_1)=0{,}029$, б) $P(A/A_2)$ – вероятность узкого таза при перинатальной смертности, $P(A/A_2)=0{,}051$. Тогда искомая вероятность перинатальной смертности при узком тазе у роженицы рассчитывается по формуле Байеса и равна:

$$P(A_2/A)=\frac{P(A_2)\cdot P(A/A_2)}{P(A_1)\cdot P(A/A_1)+P(A_2)\cdot P(A/A_2)}$$

$$P(A_2/A)=\frac{0{,}025\cdot 0{,}051}{0{,}975\cdot 0{,}029+0{,}025\cdot 0{,}051}=0{,}044=4{,}4\%.$$

Таким образом, риск перинатальной смертности при анатомически узком тазе значительно выше (почти вдвое) среднего риска (4,4% против 2,5%).

Подобные расчеты, обычно выполняемые с помощью компьютера, лежат в основе методов формирования групп пациентов повышенного риска, связанного с наличием того или иного отягощающего фактора.

[1] Перинатальный период охватывает внутриутробное развитие плода, начиная с 28-й недели беременности, период родов и первые 7 суток жизни ребенка.

4.6. Формула Бернулли, локальная и интегральная теоремы Лапласа. Закон Пуассона

Формула Бернулли

При практическом применении теории вероятностей особое значение имеют события, связанные с независимыми повторными испытаниями, для которых:

1) число испытаний n конечное;

2) каждое испытание имеет только два исхода:

а) событие A произошло;

б) событие A не произошло;

3) все испытания независимы друг от друга, т. е. вероятность появления события A в каждом из них не зависит от того, какие результаты наступили или наступят в остальных испытаниях;

4) вероятность появления события A в каждом испытании постоянна.

Приведенные выше условия получили название ***схемы Бернулли.***

Примерами повторных испытаний, описываемых схемой Бернулли, могут служить: многократное подбрасывание монеты или многократное извлечение из урны одного шара при условии, что вынутый шар после регистрации его цвета возвращается обратно в урну.

Во многих задачах требуется найти не вероятность каждого отдельного испытания, а вероятность появления события A ровно m раз в данной серии из n испытаний Бернулли, независимо от того, в каких испытаниях оно наступило.

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют ***независимыми относительно события А.***

В разных независимых испытаниях событие A может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность. Будем далее рассматривать лишь такие независимые испытания, в которых событие A имеет одну и ту же вероятность.

Ниже воспользуемся понятием ***сложного события,*** понимая под ним совмещение нескольких отдельных событий, которые называют ***простыми.***

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться. Условимся считать, что вероятность события A в каждом испытании одна и та же, а именно равна p. Следовательно, вероятность ненаступления события A в каждом испытании также постоянна и равна $q = 1 - p$.

Поставим перед собой задачу вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно m раз и, следовательно, не осуществится n-m раз. Важно подчеркнуть, что не требуется, чтобы событие A повторилось ровно m раз в определенной последовательности.

Искомую вероятность обозначим $P_n(m)$. Например, символ $P_5(3)$ означает вероятность того, что в пяти испытаниях событие появится ровно 3 раза и, следовательно, не наступит 2 раза.

Поставленную задачу можно решить с помощью так называемой ***формулы Бернулли:***

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

Рассмотрим частные случаи формулы Бернулли.

1. Вероятность появления события A в n испытаниях ровно n раз равна

$$P_n(n) = C_n^n p^n q^{n-n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} p^n = p^n$$

2. Вероятность появления события A в n испытаниях нуль раз равна

$$P_n(0) = \frac{n!}{0! \cdot n!} p^0 q^n = q^n$$

3. Вероятность появления события A в n испытаниях не более m раз равна

$$R_n(m) = P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + \ldots + P_n(m)$$

4. Вероятность появления события A в n испытаниях не менее m раз равна

$$R_n(m) = P_n(m) + P_n(m+1) + \ldots + P_n(n)$$

Пример 4.19: Появление колонии микроорганизмов данного вида в определенных условиях оценивается вероятностью $p = 0{,}9$. Какова вероятность того, что из 5 случаев эта колония микроорганизмов появится 3 раза?

Решение:

Вероятность непоявления колонии микроорганизмов равна

$$q = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

По формуле Бернулли

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5!}{3!(5-3)!} (0{,}9)^3 (0{,}1)^2 = 0{,}07\ .$$

Теорема Лапласа локальная (в дифференциальной форме)

Формула Бернулли позволяет вычислить вероятность того, что событие появится в n испытаниях ровно m раз. При выводе предполагалось, что вероятность появления события в каждом испытании постоянна. Легко видеть, что пользоваться формулой Бернулли при больших значениях *n* достаточно трудно, так как формула требует выполнения действий над громадными числами.

Естественно возникает вопрос: нельзя ли вычислить интересующую нас вероятность, не прибегая к формуле Бернулли? Оказывается, можно. Локальная теорема Лапласа и дает асимптотическую формулу, которая позволяет приближенно найти вероятность появления события ровно *m* раз в *n* испытаниях, если число испытаний достаточно велико.

Заметим, что для частного случая, а именно для $p = 1/2$, асимптотическая формула была найдена в 1730г. Муавром; в 1783 г. Лаплас обобщил формулу Муавра для произвольного *p,* отличного от 0 и 1. Поэтому теорему, о которой здесь идет речь, иногда называют ***теоремой Муавра–Лапласа***.

Доказательство локальной теоремы Лапласа довольно сложно, поэтому мы приведем лишь формулировку теоремы и примеры, иллюстрирующие ее использование.

Локальная теорема Муавра – Лапласа:

Если вероятность наступления некоторого события *A* в *n* независимых испытаниях постоянна и отлична от нуля и единицы $(0<p<1)$, то вероятность $P_n(m)$ того, что в *n* испытаниях событие *A* наступит ровно *m* раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше *n*) значению функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}; \qquad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функция $\varphi(x)$ четная, т. е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Значения функции $\varphi(x)$ для положительных значений аргумента *x* приведены в приложении. Таким образом, вероятность того, что событие *A* появится в *n* независимых испытаниях *m* раз, приближенно равна

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \text{ где } \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

<u>*Пример 4.20:*</u> Найти вероятность того, что событие *A* наступит ровно 50 раз в 600 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,1.

Решение:

По условию задачи $n = 600,\ m = 50;\ p=0,1;\ q = 0,9.$

$$P_{600}(50) \approx \frac{1}{\sqrt{600 \cdot 0,1 \cdot 0,9}} \varphi(x) = 0,13\varphi(x)$$

Значение $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 600 \cdot 0,1}{\sqrt{600 \cdot 0,1 \cdot 0,9}} = -1,3$.

Из приложения находим $\varphi(-1{,}3) = \varphi(1{,}3) = 0{,}1714$

Искомая вероятность

$$P_{600}(50) \approx 0{,}13 \cdot 0{,}1714 = 0{,}02$$

Теорема Лапласа интегральная

Предположим, что производится *n* испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* постоянна и равна *p* $(0<p<1)$. Как вычислить вероятность $P_n(m_1,m_2)$ того, что событие *A* появится в *n* испытаниях не менее m_1 и не более m_2 раз (для краткости будем говорить «от m_1 до m_2»)? На этот вопрос отвечает интегральная теорема Лапласа, которая приводится ниже, опустив доказательство.

Если вероятность *p* наступления события *A* в каждом испытании постоянна и отлична от нуля $(0<p<1)$, то вероятность $P_n(m_1,m_2)$ того, что событие *A* появится в *n* испытаниях от m_1 до m_2 раз, определяется по формуле

$$P_n(m_1,m_2) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-z^2/2} dz,$$

где $$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Неопределенный интеграл $\int_{x_1}^{x_2} e^{-z^2/2} dz$ не выражается через элементарные функции, поэтому в приложении приведены значения функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$$

В приложении даны значения функции $\Phi(x)$ для положительных значений *x* и для $x=0$. Для $x<0$ пользуются той же таблицей, используя нечетность функции $\Phi(x)$, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Функцию $\Phi(x)$ часто называют ***функцией Лапласа***.

$$P_n(m_1,m_2) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{0} e^{-z^2/2} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_2} e^{-z^2/2} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_2} e^{-z^2/2} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x0}^{x_1} e^{-z^2/2} dz = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

Таким образом, вероятность того, что событие *A* появится в *n* независимых испытаниях от m_1 до m_2 раз равна

$$P_n(m_1,m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

<u>*Пример 4.21:*</u> Вероятность того, что студент не прошел профилактического осмотра, равна 0,1. Найти вероятность того, что среди 100 случайно отобранных студентов не прошли профилактического осмотра от 10 до 20 человек.

Решение:

По условию задачи $p=0,1,\ \ q=0,9,\ \ n=100,\ \ m_1=10,\ \ m_2=20.$

$$P_{100}(10,20) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1);$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{10 - 100 \cdot 0,1}{\sqrt{100 \cdot 0,1 \cdot 0,9}} = 0$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 100 \cdot 0,1}{\sqrt{100 \cdot 0,1 \cdot 0,9}} = 3,3$$

Из приложения находим Ф(0)=0, Ф(3,3)=0,49.

Искомая вероятность

$$P_{100}(10,20) \approx \Phi(3,3) - \Phi(0) = 0,49$$

$$P_{400}(70,100) \approx \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25) = 0,8882$$

<u>*Закон Пуассона*</u>

При определении вероятности того, что в n независимых испытаниях (испытаниях Бернулли) событие произойдет m раз, используют формулу Бернулли. В случае, когда n велико, пользуются асимптотической формулой Лапласа. Однако эта формула непригодна, если вероятность события мала.

При больших n и малых p пользуются ***асимптотической формулой Пуассона***

$$P_n(m) \approx \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu}, \qquad \text{где } \mu = np$$

Последнюю формулу нередко называют ***законом Пуассона*** или ***законом редких событий***. Точное выражение для $P_n(m)$ зависит от трех параметров: $n, m, p,$ в приближенном выражении параметры n и p связаны в один параметр $\mu = np$.

<u>*Пример 4.22:*</u> Фармзавод отправил на аптечный склад 10 000 ампул витамина «С». Вероятность того, что в пути ампула повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на склад прибудут 5 негодных ампул.

Решение:

По условию $n=10000,\ p=0,0002,\ m=5.$

Параметр $\mu = np = 2$

По формуле $P_n(m) \approx \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu}$ получаем: $P_{10000}(5) \approx \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu} = \frac{2^5}{5!} e^{-2} = 0,035$.