ТЕМА №5
СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

ПРОГРАММНЫЕ ВОПРОСЫ:

5.1. Случайные величины. Дискретные и непрерывные случайные величины.
5.2. Закон распределения дискретной случайной величины.
5.3. Числовые характеристики дискретных случайных величин.
5.4. Биномиальное распределение, распределение Пуассона.
5.5. Функция распределения и плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины.
5.6. Характеристики распределения непрерывных случайных величин.
5.7. Равномерное и нормальное распределение случайной величины.
5.8. Закон больших чисел. Теорема Чебышева, теорема Бернулли, их вероятностный смысл. Понятие о теореме Ляпунова.

5.1. Случайные величины. Дискретные и непрерывные случайные величины

В математике величина – это общее название различных количественных характеристик предметов и явлений. Длина, площадь, температура, давление и т.д. – примеры разных величин.

Величину, которая принимает различные числовые значения под влиянием случайных обстоятельств, называют ***случайной величиной***.

Примерами случайных величин являются: число больных на приеме у врача; количество рецептов, поступивших в аптеку в течение рабочего дня; продолжительность человеческой жизни и др.

Случайные величины обозначают прописными буквами латинского алфавита X, Y, Z,…, а их возможные значения – соответствующими строчными буквами x, y, z, …

Вероятности случайных величин обозначают буквами с соответствующими индексами: $P(X = x_1) = P(x_1) = P_1$ и т.д.

Различают дискретные и непрерывные величины.

Случайная величина называется ***дискретной***, если она принимает только определенные, отдельные друг от друга значения, которые можно установить и перечислить.

Примерами дискретной случайной величины являются:

– число студентов в аудитории – может быть только целым положительным числом: 0, 1, 2, 3, …, 20;

– цифра, которая появляется на верхней грани при бросании игральной кости – может принимать лишь целые значения от 1 до 6;

– относительная частота попадания в цель при 10 выстрелах – ее значения: 0; 0,1; 0,2; …, 1;

– число событий, происходящих за одинаковые промежутки времени: частота пульса, число вызовов скорой помощи за 1 час, количество операций в месяц с летальным исходом и т.д.

Случайная величина называется ***непрерывной***, если она может принимать любые значения внутри определенного интервала, конечного или бесконечного.

К непрерывным случайным величинам относятся, например, масса тела и рост взрослых людей, объем мозга, продолжительность жизни, количественное содержание ферментов у здоровых людей, размеры форменных элементов крови, pH крови и т.д.

Понятие случайной величины играет определяющую роль в современной теории вероятностей, разработавшей специальные приемы перехода от случайных событий к случайным величинам.

Если случайная величина зависит от времени, то можно говорить о случайном процессе.

5.2. Закон распределения дискретной случайной величины

Чтобы дать полную характеристику дискретной случайной величины, необходимо указать все ее возможные значения и их вероятности.

Соответствие между возможными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями называется ***законом распределения*** этой величины.

Обозначим возможные значения случайной величины X через x_i, а соответствующие им вероятности – через p_i. Тогда закон распределения дискретной случайной величины можно задать тремя способами: в виде таблицы, графика или формулы.

В таблице, которая называется ***рядом распределения***, перечисляются все возможные значения дискретной случайной величины X и соответствующие этим значениям вероятности p:

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

При этом сумма всех вероятностей p_i должна быть равна единице (условие нормировки):

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

Графически закон представляется ломаной линией, которую принято называть ***многоугольником распределения*** (рис.5.1). Здесь по оси абсцисс откладывают все возможные значения случайной величины x_i , а по оси ординат – соответствующие им вероятности p_i . Полученные точки соединяют отрезками прямых.

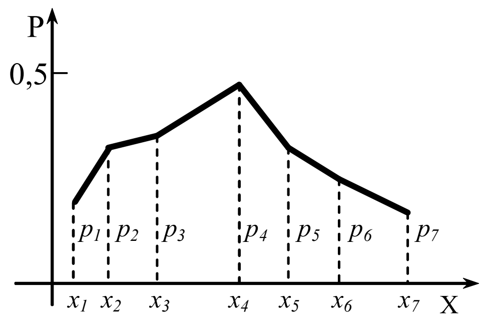


Рис. 5.1

Аналитически закон выражается формулой. Например, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна *p,* то вероятность поражения цели один раз при *n* выстрелах выражается формулой: $P(n) = nq^{n-1}p$, где $q = 1 - p$ – вероятность промаха при одном выстреле.

<u>*Пример 5.1*</u>*:* В денежной лотерее выпушено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 рублей и 10 выигрышей по 1 рублю. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Решение:

Возможные значения для *X:* $x_1 = 50$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$. Вероятности этих значений :

$$p_1 = \frac{1}{100} = 0{,}01, \qquad p_2 = \frac{10}{100} = 0{,}1, \qquad p_3 = 1 - (p_2 + p_1) = 1 - (0{,}01 + 0{,}1) = 0{,}89.$$

Закон распределения выигрыша задан в виде таблицы:

X	50	1	0
p	0,01	0,1	0,89

Контроль: $0{,}01 + 0{,}1 + 0{,}89 = 1$.

<u>*5.3. Числовые характеристики дискретных случайных величин*</u>

Полную характеристику дискретных и непрерывных случайных величин можно получить, зная законы их распределения. Однако во многих практически значимых ситуациях пользуются так называемыми ***числовыми характеристиками*** случайных величин. Главное назначение этих характеристик – выразить в сжатой форме наиболее существенные особенности распределения случайных величин. Важно, что данные параметры представляют собой конкретные (постоянные) значения, которые можно оценивать с помощью полученных в опытах данных.

В теории вероятностей и математической статистике используется достаточно много различных характеристик, но мы рассмотрим только наиболее употребляемые.

Рассмотрим ***характеристики положения*** – *математическое ожидание* и *моду.* Они характеризуют положение случайной величины на числовой оси, т. е. указывают некоторое ее ориентировочное значение, около которого группируются все другие возможные значения случайной величины. Среди них важнейшую роль играет математическое ожидание *M(X).*

Математическим ожиданием *M(X)* дискретной случайной величины *X* называется сумма произведений всех возможных значений величины *X* на вероятности этих значений:

$$M(X) = \mu = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Отметим, что при большом числе испытаний среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины приближается к ее математическому ожиданию.

$$M(X) \approx \overline{X} .$$

Замечание: Математическое ожидание случайной величины есть величина неслучайная.

Математическое ожидание случайной величины *X* называют ***центром распределения***. Это название введено по аналогии с названием «центр тяжести». Если на оси *OX* в точках с абсциссами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ помещены массы $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то абсцисса центра тяжести

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} .$$

Учитывая, что $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ и $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, получим $x_C = M(X)$, т.е. математическое ожидание равно абсциссе центра тяжести системы материальных точек, абсциссы которых равны возможным значениям случайной величины, а массы – их вероятностям.

Физический смысл математического ожидания как характеристики положения центра распределения можно проиллюстрировать рядом примеров. Так, при многократных измерениях некоторой величины в одних и тех же условиях математическое ожидание можно рассматривать как «истинное» значение этой величины. При наблюдении колебаний массы отдельных таблеток, изготовленных на фармацевтическом заводе, математическое ожидание имеет смысл массы, на которую настроена таблеточная машина.

Основные свойства математического ожидания

1.Математическое ожидание постоянной величины C равно этой постоянной, т.е. $C = const$, $M(C) = C$.

2. Постоянный множитель C можно выносить за знак математического ожидания, т.е $M(CX) = CM(X)$.

3. Математическое ожидание алгебраической суммы случайных величин равно алгебраической сумме их математических ожиданий, т.е. $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.

4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий, т.е. $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

5. Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p, тогда математическое ожидание $M(X)$ числа появления события A в n независимых испытаниях $M(X) = np$.

Модой $Mo(X)$ дискретной случайной величины называют ее наиболее вероятное значение (рис. 5.2).

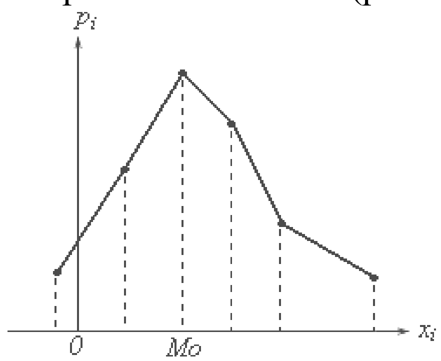


Рис.5.2

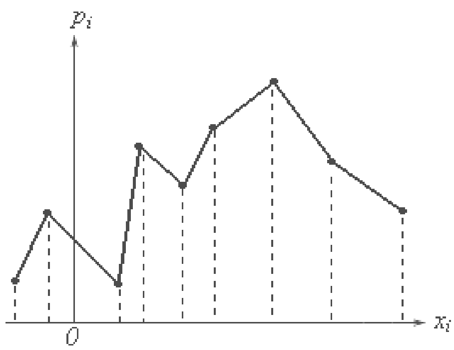


Рис.5.3

Если многоугольник распределения имеет более одного максимума, распределение называется ***полимодальным*** (рис. 5.3).

<u>*Пример 5.2:*</u> Пусть дана случайная величина X с известным законом распределения, заданным следующей таблицей:

X	0	1	2	3	4
p	0,1	0,2	0,4	0,1	0,2

Из этой таблице видно, что мода случайной величины X равна *2*, так как этому значению соответствует наибольшая вероятность $P(2) = 0{,}4$.

При составлении годичного плана потребности населения в каком-то лекарственном препарате определяют не ее математическое ожидание, а моду, т.е. месяц, в котором чаще всего требуется данный препарат.

В микробиологии для закона распределения вероятностей появления колонии микроорганизмов в пробах также определяют обычно не математическое ожидание, а моду, т.е. пробу, которой соответствует наибольшая вероятность появления колонии микроорганизмов.

В медицине знание среднего возраста детей, заболевших ангиной, менее интересно, чем знание возраста, в котором чаще всего происходит заболевание (в частности, при решении вопроса о том, где должны быть сосредоточены главные профилактические условия: в школах или дошкольных учреждениях).

Кроме характеристик положения – средних, типичных значений случайной величины, – употребляется еще ряд характеристик, каждая из которых описывает то или иное свойство распределения.

Характеристики рассеяния – это *дисперсия* и *стандартное отклонение* (*среднее квадратическое отклонение*).

Дисперсией $D(X)$ дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания μ:

$$D(X)=\sigma^2=M((X-\mu)^2), \quad \text{или} \quad D(X)=\sigma^2=M(X^2)-\mu^2.$$

Основные свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины C равна нулю: $D(C)=0$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат: $D(CX)=C^2D(X)$.

3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$.

5. Дисперсия числа появления события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность события A постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании: $D(X)=npq$.

Следствие. $D(X\pm C)=D(X)+D(C)=D(X)+0=D(X)$, где C – постоянная.

Дисперсия характеризует рассеяние, разбросанность значений случайной величины X относительно ее математического ожидания. Само слово «дисперсия» означает «рассеяние».

Однако дисперсия $D(X)$ имеет размерность квадрата случайной величины, что весьма неудобно при оценке разброса в физических, биологических, медицинских и других приложениях. Поэтому обычно пользуются параметром, размерность которого совпадает с размерностью *X*. Это – *среднее квадратическое (стандартное) отклонение*.

Средним квадратическим отклонением случайной величины называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{M((X-\mu)^2)}$$

Отметим, что среднее квадратическое отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин:

$$\sigma(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \sqrt{D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n)}$$

Пример 5.3: Закон распределения случайной величины *X* задан таблицей. Определить дисперсию $D(X)$.

X	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2

Решение:

По определению $D(X) = \sigma^2 = M((X-\mu)^2)$. Вычислим математическое ожидание величины *X*:

$$\mu = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}2 = 2{,}3$$

Найдем квадраты всех возможных отклонений величины *X* от μ:

$$[x_1 - \mu]^2 = (1-2{,}3)^2 = 1{,}69,$$
$$[x_2 - \mu]^2 = (2-2{,}3)^2 = 0{,}09,$$
$$[x_3 - \mu]^2 = (5-2{,}3)^2 = 7{,}29.$$

Напишем закон распределения квадрата отклонения:

$[X-\mu]^2$	1,69	0,09	7,29
p	0,3	0,5	0,2

Тогда дисперсия равна:

$$D(X) = 1{,}69 \cdot 0{,}3 + 0{,}09 \cdot 0{,}5 + 7{,}29 \cdot 0{,}2 = 2{,}01$$

Пример 5.4: Закон распределения случайной величины *X* задан следующей таблицей:

X	0	1	2	3	4
P	0,13	0,35	0,35	0,15	0,02

Вычислить ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение:

Сначала находим математическое ожидание случайной величины *X*:

$$M\left(X\right)=0\cdot 0{,}13+1\cdot 0{,}35+2\cdot 0{,}35+3\cdot 0{,}15+4\cdot 0{,}02=1{,}58\,.$$

Далее запишем закон распределения X^2:

X^2	0	1	4	9	16
P	0,13	0,35	0,35	0,15	0,02

Математическое ожидание случайной величины X^2:

$$M\left(X^2\right)=0\cdot 0{,}13+1\cdot 0{,}35+4\cdot 0{,}35+9\cdot 0{,}15+16\cdot 0{,}02=3{,}42$$

Находим дисперсию:

$$D\left(X\right)=M(X^2)-[M(X)]^2=3{,}42-1{,}58^2=0{,}92\,.$$

Отсюда находим среднеквадратическое отклонение

$$\sigma\left(X\right)=\sqrt{D\left(X\right)}=\sqrt{0{,}92}\approx 0{,}96\,.$$

5.4. Биномиальное распределение, распределение Пуассона

Биномиальное распределение

Пусть производится *n* независимых испытаний, в каждом из которых событие *A* может появиться, либо не появиться. Вероятность наступления события во всех испытаниях постоянна и равна *p* (следовательно, вероятность непоявления $q=1-p$). Рассмотрим в качестве дискретной случайной величины *X* число появлений события *A* в этих испытаниях.

Поставим перед собой задачу: найти закон распределения величины *X*. Для ее решения требуется определить возможные значения *X* и их вероятности. Очевидно, событие *A* в *n* испытаниях может либо не появиться, либо появиться *1* раз, либо *2* раза, …, либо *n* раз. Таким образом, возможные значения *X* таковы: $x_0=0$, $x_1=1$, …, $x_n=n$. Остается найти вероятности этих возможных значений, для чего достаточно воспользоваться формулой Бернулли:

$$P_n(X)=C_n^X p^X q^{n-X}$$

Данная формула является аналитическим выражением искомого закона распределения.

Биноминальным называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли. Закон назван «биноминальным» потому, что правую часть равенства $P_n(X)=C_n^X p^X q^{n-X}$ можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:

$$(p+q)^n=C_n^n p^n+C_n^{n-1}p^{n-1}q+\ldots+C_n^k p^k q^{n-k}+\ldots+C_n^0 q^n$$

Таким образом, первый член разложения p^n определяет вероятность наступления рассматриваемого события *n* раз в *n* независимых испытаниях; второй член $np^{n-1}q$ определяет вероятность наступления события $n-1$ раз; ...; последний член q^n определяет вероятность того, что событие не появится ни разу.

Напишем биноминальный закон в виде таблицы:

X	n	$n-1$	...	k	...	0
p	p^n	$np^{n-1}q$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	q^n

Математическое ожидание случайной величины, подчиняющейся биномиальному распределению, $M(X) = np$.

Дисперсия случайной величины, подчиняющейся биномиальному закону равна $D(X) = npq$.

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma = \sqrt{npq}$.

Пример5.5: Предполагая одинаковыми вероятности рождения мальчика и девочки, установить закон распределения случайной величины *X,* которая выражает число мальчиков в семье, имеющей пять детей.

Решение:

Пусть X – количество мальчиков в семье. Величина X может принимать значения $0,1,2,3,4,5$. Найдем вероятности этих значений по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m};$$

$$P_5(0) = 0,5^5 = 0,03125; \qquad P_5(1) = \frac{5!}{4!1!} \cdot 0,5^4 \cdot 0,5^1 = 0,15625;$$

$$P_5(2) = \frac{5!}{3!2!} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^2 = 0,3125; \qquad P_5(3) = \frac{5!}{2!3!} \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^3 = 0,3125;$$

$$P_5(4) = \frac{5!}{1!4!} \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^4 = 0,15625; \qquad P_5(5) = 0,5^5 = 0,03125;$$

Закон распределения имеет вид:

X	0	1	2	3	4	5
p	0,03125	0,15625	0,3125	0,3125	0,15625	0,03125

Контроль: $0,03125 + 0,15625 + 0,3125 + 0,3125 + 0,15625 + 0,03125 = 1$

Распределение Пуассона

Пусть производится *n* независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* равна *p*. Для определения вероятности *k* появлений события в этих испытаниях используют формулу Бернулли. Если же *n* велико, то пользуются асимптотической формулой Лапласа. Однако, эта формула непригодна, если вероятность события мала (*p<0,1*). В этих случаях (*n* велико, *p* мало) прибегают к асимптотической формуле Пуассона.

Итак, поставим перед собой задачу: найти закон распределения величины *X* если число испытаний велико, а вероятность события очень мала. Для ее решения требуется определить возможные значения *X* и их вероятности. Очевидно, событие *A* в *n* испытаниях может либо не появиться, либо появиться *1* раз, либо *2* раза, …, либо *n* раз. Таким образом, возможные значения *X* таковы: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, …, $x_n = n$. Остается найти вероятности этих возможных значений, воспользовавшись формулой Пуассона:

$$P_n(X) \approx \frac{\mu^X}{X!} e^{-\mu}, \qquad \text{где} \quad \mu = np$$

Эта формула выражает ***закон распределения Пуассона*** вероятностей массовых (*n* велико) редких (*p* мало) событий.

Распределение Пуассона является дискретным и характеризуется только одним параметром – математическим ожиданием μ. Среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{\mu}$.

5.5. Функция распределения и плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Для описания реальных величин, зависящих от случая, класса дискретных случайных величин недостаточно. Действительно, таким величинам, как размеры любых физических объектов, температура, давление, длительность тех или иных биологических процессов неестественно приписывать дискретное множество возможных значений. Напротив, естественно считать, что их возможные значения в принципе могут быть любыми числами в некоторых пределах, т.е. они являются непрерывными величинами.

В отличие от дискретной величины закон распределения непрерывной случайной величины невозможно задать в виде таблицы, в которой были бы перечислены все возможные значения этой величины и их вероятности. Нельзя также задать непрерывную величину с помощью формулы, которая позволила бы для каждого значения этой величины найти соответствующую вероятность.

Одним из возможных способов задания непрерывной случайной величины является использование с этой целью соответствующей функции распределения.

Функцией распределения случайной величины *X* называют функцию *F(x)*, равную вероятности $P(X < x)$ того, что случайная величина примет значение *X*, меньшее *x*:

$$F(x) = P(X < x)$$

Функцию распределения иногда называют *интегральной функцией распределения* или *интегральным законом распределения*.

Геометрически равенство $F(x) = P(X < x)$ можно истолковать так: $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x (рис.5.4)

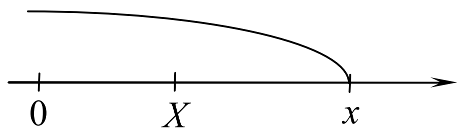


Рис.5.4

Функция распределения полностью характеризует случайную величину с вероятностной точки зрения, т.е. является одной из форм закона распределения. Она существует для всех случайных величин, как дискретных, так и непрерывных.

Свойства функции распределения

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку [0; 1]: $0 \le F(x) \le 1$.

Это свойство вытекает из определения функции распределения как вероятности: вероятность всегда вероятность есть неотрицательное число, не превышающее единицы ($0 \le P \le 1$).

2. Функция распределения является неубывающей функцией, т.е. из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $F(x_2) > F(x_1)$.

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Следствие 1. Вероятность попадания случайной величины X в интервал (a,b) равна разности между значениями функции распределения в правом и левом концах интервала (a,b):

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

Следствие 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю:

$$P(X = a) = 0.$$

Так, вероятность того, что наугад выбранная таблетка будет иметь массу, в точности равную некоторому фиксированному значению, например *0,20 г*, равна нулю.

3. Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a,b), то: 1) $F(x) = 0$ при $x \le a$; 2) $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

Следствие 3. Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей числовой оси, то справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0; \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1.$$

Данные свойства позволяют представить, как выглядит график функции распределения непрерывной случайной величины.

График функции распределения непрерывной случайной величины расположен в бесконечной полосе, ограниченной прямыми линиями $y = 0$ и $y = 1$ (первое свойство).

При возрастании x в интервале (a, b), в котором заключены все возможные значения случайной величины, график «подымается вверх» (второе свойство).

При $x \le a$ ординаты графика равны нулю; при $x \ge b$ ординаты графика равны единице (третье свойство).

В общем случае он имеет вид, изображенный на рисунке 5.5.

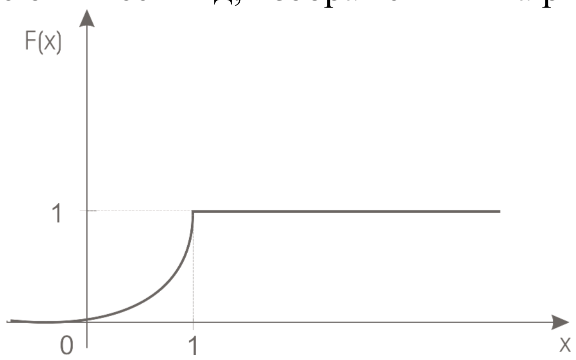


Рис. 5.5

Для дискретной случайной величины функция распределения $F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$, где неравенство $x_i < x$ под знаком суммы указывает, что суммирование распространяется на все значения x_i, меньшие x.

В точках возможных значений дискретной случайной величины X функция распределения меняется скачкообразно, причем величина скачка равна вероятности этого значения.

Пример 5.6: Дан ряд распределения дискретной случайной величины:

X	2	3	5	6	8
p	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Построить функцию распределения вероятностей этой случайной величины X.

Решение:

Если $x \le 2$, то $F(x) = P(X < x) = 0$;

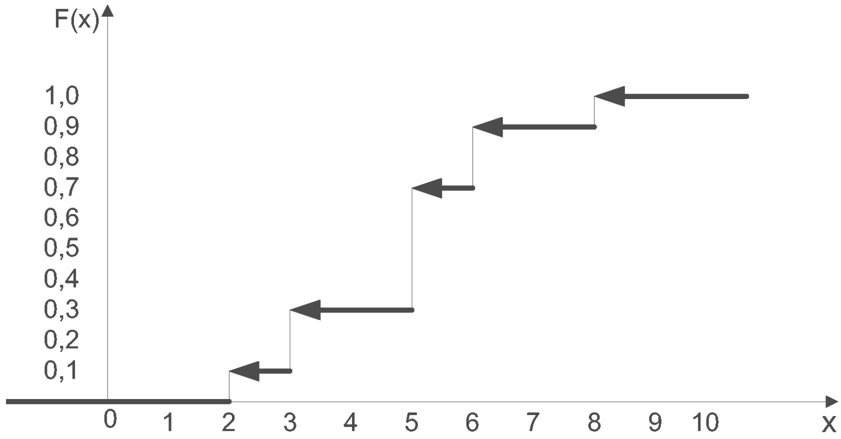
если $2 < x \le 3$, то $F(x) = P(X < x) = 0{,}1$;

если $3 < x \le 5$, то $F(x) = P(X < x) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$;

если $5 < x \le 6$, то $F(x) = P(X < x) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}7$;

если $6 < x < 8$, то $F(x) = P(X < x) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}9$;

если $x > 8$, то $F(x) = P(X < x) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}1 = 1$.



Выше непрерывная случайная величина задавалась при помощи функции распределения. Этот способ задания не является единственным. Непрерывную случайную величину можно также задать, используя другую функцию, которую называют *плотностью распределения* или *плотностью вероятности* (иногда ее называют *дифференциальной функцией распределения*).

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют функцию $f(x)$, равную первой производной от интегральной функции распределения:

$$f(x) = F'(x).$$

Из приведенного определения следует, что функция распределения является первообразной для плотности распределения.

Заметим, что для описания распределения вероятностей дискретной случайной величины дифференциальная функция неприменима.

<u>Свойства плотности распределения вероятностей</u>

1. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу (a,b), равна определенному интегралу от плотности вероятности, взятому в пределах от a до b:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Геометрически полученный результат можно истолковать так: вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a,b), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью *x*, кривой распределения *f(x)* и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 5.6). Это следует из геометрического смысла определенного интеграла.

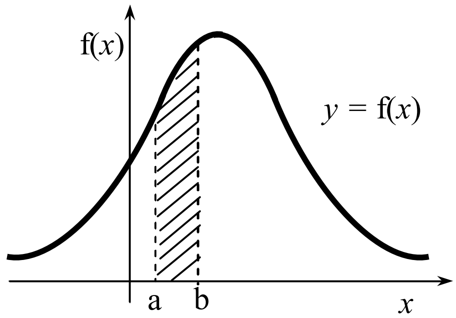


Рис. 5.6

<u>*Следствие 1*</u>. Если известна функция *f(x)*, то, изменяя пределы интегрирования *a* на $-\infty$ и *b* на *x*, получим:

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = F(x) - F(-\infty) = F(x) - 0 = F(x).$$

<u>*Следствие 2.*</u> Несобственный интеграл от плотности вероятности в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Данное равенство называется ***условием нормировки*** плотности вероятностей.

Если все значения *X* лежат в интервале (a,b), то условие нормировки можно записать в виде:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1.$$

2. Плотность вероятности – неотрицательная функция: $f(x) \geq 0$.

<u>*Пример5.7*</u>*:* Для плотности вероятности случайной величины *X*

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & при \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & при \; x < 0 \; или \quad x > 1 \end{cases}$$

найти коэффициент *a* и вероятность попадания случайной величины *X* в интервал $\left(0;\frac{1}{4}\right)$.

Решение:

Так как все значения данной случайной величины заключены на отрезке $(0;1)$, то, согласно условию нормировки, плотность распределения

$$\int_0^1 ax^2 dx = 1; \quad \left.\frac{ax^3}{3}\right|_0^1 = 1; \quad \frac{a}{3} = 1; \quad a = 3$$

Вероятность того, что X примет значение из заданного интервала, равно приращению интегральной функции в этом интервале, т.е. $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

В нашем случае $a = 0$ и $b = \frac{1}{4}$, поэтому

$$F(x) = \int 3x^2 dx = \frac{3x^3}{3} = x^3$$

$$P\left(0 < X < \frac{1}{4}\right) = F\left(\frac{1}{4}\right) - F(0) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}.$$

<u>5.6. Характеристики распределения непрерывных случайных величин</u>

Под основными числовыми характеристиками непрерывной случайной величины понимают, как и в случае дискретной случайной величины, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Как и для дискретной величины, математическое ожидание представляет собой среднее значение этой величины, а дисперсия и среднее квадратическое отклонение являются усредненными характеристиками степени разброса возможных значений этой величины относительно ее математического ожидания.

Однако формулы, определяющие математическое ожидание $M(X) = \mu$ и дисперсию $D(X) = \sigma^2$ непрерывной случайной величины, отличаются от соответствующих формул для дискретной величины.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a,b]$, называют величину определенного интеграла:

$$M(X) = \mu = \int_a^b xf(x)dx$$

где $f(x)$ – плотность вероятности случайной величины X.

Если возможные значения принадлежат всей оси x, то

$$M(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Математическое ожидание называют ***центром распределения вероятностей*** случайной величины X.

По аналогии с дисперсией дискретной величины определяется и дисперсия непрерывной величины.

Дисперсией непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a,b]$, называют величину определенного интеграла

$$D(X)=\sigma^2=\int_a^b (x-\mu)^2 f(x)dx,$$

где μ – математическое ожидание, *f(x)* – плотность вероятности случайной величины.

Если возможные значения X принадлежат всей оси x, то

$$D(X)=\sigma^2=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется, как и для величины дискретной, равенством

$$\sigma=\sqrt{D(X)}$$

<u>*Замечание 1.*</u> Свойства математического ожидания и дисперсии дискретных величии сохраняются и для непрерывных величин.

<u>*Замечание 2.*</u> Для вычисления дисперсии более удобны формулы:

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-(M(x))^2 \qquad D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(M(x))^2$$

<u>*5.7. Равномерное и нормальное распределение случайной величины*</u>

При решении задач, которые выдвигает практика, приходится сталкиваться с различными распределениями непрерывных случайных величин. Плотности распределений непрерывных случайных величин называют также ***законами распределений***. Часто встречаются, например, законы равномерного и нормального распределений.

Равномерное распределение случайной величины

Распределение вероятностей называют ***равномерным***, если на интервале (a,b), которому принадлежат все возможные значения непрерывной случайной величины, плотность вероятности сохраняет постоянное значение, а вне этого отрезка равна нулю.

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le a,\\ C & при \quad a<x\le b,\\ 0 & при \quad x>b\end{cases}$$

График плотности вероятности равномерно распределенной случайной величины приведен на рисунке 5.7.

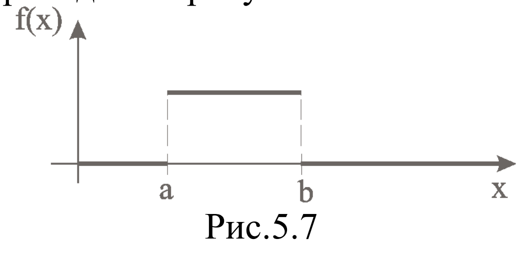


Рис.5.7

Найдем плотность равномерного распределения *f(x)*, считая, что все возможные значения случайной величины заключены в интервале (a,b), на котором функция *f(x)* сохраняет постоянное значение $f(x)=C$.

По условию, X не принимает значений вне интервала (a,b), поэтому $f(x)=0$ при $x<a$ и $x>b$.

Найдем значение постоянной *C*. Так как все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a,b), то должно выполняться соотношение

$$\int_a^b f(x)dx=1,\quad \text{или}\quad \int_a^b Cdx=1,\quad \text{отсюда}\quad C=\frac{1}{b-a}.$$

Таким образом, для равномерно распределенной случайной величины *X,* возможные значения которой принадлежат интервалу (a,b) (рис. 5.7), плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при}\quad x\le a, \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при}\quad a<x\le b, \\ 0 & \text{при}\quad x>b \end{cases}$$

Функция распределения случайной величины *X* с плотностью вероятности *f(x)* имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при}\quad x<a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при}\quad a\le x\le b, \\ 1 & \text{при}\quad x>b \end{cases}$$

График функции *F(x)* изображен на рисунке 5.8.

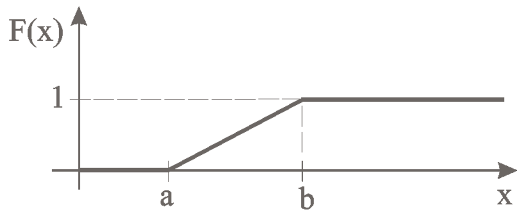


Рис.5.8

Основные числовые характеристики равномерно распределенной непрерывной случайной величины равны:

Математическое ожидание $M(X)=\dfrac{a+b}{2}$,

Дисперсия $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$,

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Нормальное распределение случайной величины

Нормальный закон распределения (закон Гаусса) играет исключительно важную роль в теории вероятностей. Во-первых, это наиболее часто встречающийся на практике закон распределения непрерывных случайных величин. Во-вторых, он является предельным законом в том смысле, что к нему при определенных условиях приближаются другие законы распределения.

Закон распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют нормальным, если плотность вероятности определяется формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где x – значение случайной величины X; μ и σ – математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

Из формулы видно, что если случайная величина распределена по нормальному закону, то достаточно знать только два числовых параметра – μ и σ, чтобы полностью знать закон ее распределения.

График функции *f(x)* называется нормальной кривой распределения или кривой Гаусса. Он имеет симметричный вид относительно ординаты $x = \mu$. Максимальная плотность вероятности, равная $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0,4}{\sigma}$, соответствует математическому ожиданию $\mu = \overline{X}$; по мере удаления максимума *f(x)* падает и постепенно приближается к нулю. (рис. 5.9)

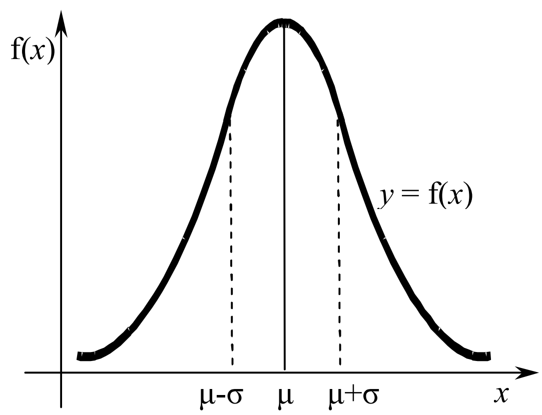


Рис. 5.9

Величина μ называется также центром рассеяния. Среднее квадратическое отклонение σ характеризует ширину кривой распределения.

Установим, как влияют параметры μ и σ на форму кривой Гаусса.

При изменении значения μ нормальная кривая не меняется по форме, но сдвигается вдоль оси абсцисс (рис.5.10). Параметр σ определяет форму кривой нормального распределения. С возрастанием σ максимальная ордината кривой убывает, а сама кривая, становясь более пологой, растягивается вдоль оси абсцисс; при уменьшении σ кривая вытягивается вверх, одновременно сжимаясь с боков. Вид кривой распределения при разных значениях σ $(\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3)$ показан на рисунке 5.11.

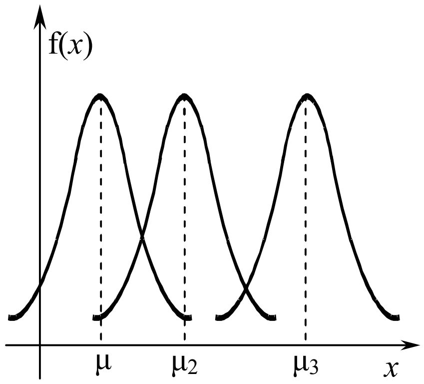


Рис. 5.10

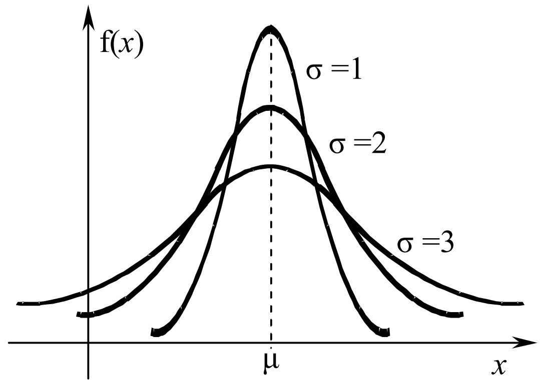


Рис. 5.11

Естественно, что при любых значениях μ и σ площадь, ограниченная нормальной кривой и осью X, остается равной 1 (условие нормировки):

$$\int_a^b f(x)dx = 1 \qquad \text{или} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Вероятность попадания значений случайной величины X в интервал (x_1, x_2), т.е. $P(x_1 < X < x_2)$, равна:

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

или

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right),$$

где *Ф(х)* – функция Лапласа.

На практике часто приходиться вычислять вероятности попадания значений нормально распределенной случайной величины на участки, симметричные относительно μ. В частности, рассмотрим следующую, важную в прикладном отношении задачу. Отложим от μ вправо и влево отрезки, равные *σ*, *2σ* и *3σ* (рис. 5.12) и проанализируем результат вычисления вероятности попадания X в соответствующие интервалы:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0{,}6827 = 68{,}27\%;$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}9545 = 95{,}45\%;$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0{,}9973 = 99{,}73\%;$$

Из последнего неравенства следует: практически достоверно, что значения нормально распределенной случайной величины X с параметрами μ и σ лежат в интервале $\mu \pm 3\sigma$. Иначе говоря, зная $\mu = \overline{X}$ и σ, можно указать интервал, в который с вероятностью $P = 99{,}73\%$ попадают значения данной случайной величины. Такой способ оценки диапазона возможных значений X известен как «правило трех сигм».

Другими словами, вероятность того, что абсолютная величина отклонения превысит утроенное среднее квадратическое отклонение, очень мала, а именно равна 0,0027. Это означает, что лишь в 0,27% случаев так может произойти. Такие события, исходя из принципа невозможности маловероятных событий, можно считать практически невозможными. В этом и состоит сущность правила трех сигм: если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

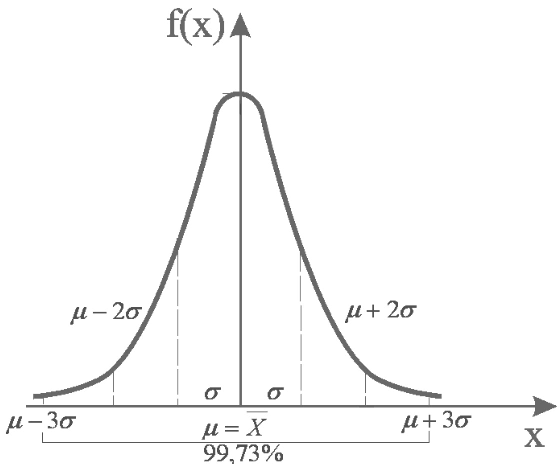


Рис.5.12

На практике правило трех сигм применяется так: если распределение изучаемой случайной величины неизвестно, но условие, указанное в приведенном правиле, выполняется, то имеются основания предполагать, что изучаемая величина распределена нормально; в противном случае она не распределена нормально.

<u>Пример5.8</u>: Известно, что для здорового человека *pH* крови является нормально распределенной величиной со средним значением (математическим ожиданием) 7,4 и стандартным отклонением 0,2. Определите диапазон значений этого параметра.

Решение:

Для ответа на данный вопрос воспользуемся «правилом трех сигм»; с вероятностью, равной 99,73%, можно утверждать, что диапазон значений *pH* для здорового человека составляет [6,8; 8].

<u>Пример 5.9</u>: Случайная величина *X* подчинена нормальному закону с математическим ожиданием μ = 375 и средним квадратическим отклонением σ = 25. Найти вероятность того, что значение этой случайной величины будет заключено в пределах от 300 до 425.

Решение:

Запишем вначале закон распределения. Общая формула имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}.$$

Подставляя $\mu = 375$ и $\sigma = 25$, после вычислений:

$$f(x) = \frac{1}{25\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-375)^2}{1250}}.$$

Вероятность того, что X примет значение из интервала $x_1 < X < x_2$, имеет вид:

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-x^2/2} dx$ – функция Лапласа. Эта функция определяется с помощью таблиц. В нашем случае:

$$P(300 < X < 425) = \Phi\left(\frac{425 - 375}{25}\right) - \Phi\left(\frac{300 - 375}{25}\right) = \Phi(2) - \Phi(-3) = \Phi(2) + \Phi(3).$$

По таблице находим: $\Phi(2) = 0{,}4772;\ \Phi(3) = 0{,}49865$, следовательно:

$$P(300 < X < 425) = 0{,}4772 + 0{,}49865 = 0{,}97585.$$

Нормально распределенные случайные величины широко встречаются в природе, на практике. Выдающимся русским математиком А.М. Ляпуновым была доказана центральная предельная теорема теории вероятностей, из которой вытекает следующее следствие: если случайная величина представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то эта случайная величина имеет распределение, близкое к нормальному.

5.8. Закон больших чисел. Теорема Чебышева, теорема Бернулли, их вероятностный смысл. Понятие о теореме Ляпунова

Как мы знаем, нельзя заранее уверенно предвидеть, какое из возможных значений примет случайная величина в итоге испытании; это зависит от многих случайных причин, учесть которые мы не в состоянии. Казалось бы, что поскольку о каждой случайной величине мы располагаем в этом смысле весьма незначительными сведениями, то вряд ли можно установить закономерности поведения и суммы достаточно большого числа случайных величин. На самом деле это не так. Оказывается, что при некоторых сравнительно широких условиях суммарное поведение достаточно большого числа случайных величин почти утрачивает случайный характер и становится закономерным. Для практики очень важно знание условий, при выполнении которых совокупное действие очень многих случайных причин приводит к результату, почти не зависящему от случая, так как позволяет предвидеть ход явлений. Эти условия и указываются в теоремах, носящих общее название ***закона больших чисел***. К ним относятся теоремы Чебышева и Бернулли. Теорема Чебышева является наиболее общим законом больших чисел, теорема Бернулли – простейшим.

Теорема Чебышева

Если случайные величины $X_1, X_2, ... X_i, ..., X_n$ попарно независимые, имеют одинаковые математические ожидания $M(X_i) = \mu\ (i = 1, 2, ... n)$ и ограниченные дисперсии $\sigma^2(X_i) \le C\ \ (i = 1, 2, ... n)$, то, какова бы ни была положительная постоянная *ε*, вероятность осуществления неравенства $\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon$ стремится к единице при $n \to \infty$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 .$$

Таким образом, теорема Чебышева утверждает, что если рассматривается достаточно большое число независимых случайных величин, имеющих ограниченные дисперсии, то почти достоверным можно считать событие, состоящее в том, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических $\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon$ ожиданий будет по абсолютной величине сколь угодно малым.

Выше, формулируя теорему Чебышева, мы предполагали, что случайные, величины имеют различные математические ожидания. На практике часто бывает, что случайные величины имеют одно и то же математической ожидание. Очевидно, что если вновь допустить, что дисперсии этих величин ограничены то к ним будет применима теорема Чебышева.

Обозначим математическое ожидание каждой из случайных величин через *μ*; в рассматриваемом случае среднее арифметическое математических ожиданий, как легко видеть, также равно *μ*.

Мы можем сформулировать теорему Чебышева для рассматриваемого частного случая.

Если $X_1, X_2, ... X_i, ..., X_n$ – попарно независимые случайные величины, имеющие одно и то же математическое ожидание *μ*, и если дисперсия этих величин равномерно ограничены, то как бы мало ни было число *ε>0*, вероятность неравенства

$$\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_i + ... + X_n}{n} - \mu\right| < \varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Другими словами, в условиях теоремы будет иметь место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_i + \ldots + X_n}{n} - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Сущность данной теоремы такова: хотя отдельные независимые случайные величины могут принимать значения далекие от своих математических ожиданий, – среднее арифметическое достаточно большого числа случайных величин с большой вероятностью принимает значения близкие к определенному постоянному числу, а именно к числу $\frac{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n}{n}$ (или к числу μ в частном случае). Иными словами, отдельные случайные величины могут иметь значительный разброс, а их среднее арифметическое рассеянно мало.

Таким образом, нельзя уверенно предсказать, какое возможное значение примет каждая из случайных величин, но можно предвидеть какое значение примет их среднее арифметическое.

Итак, среднее арифметическое достаточно большого числа независимых случайных величин (дисперсии которых равномерно ограничены) утрачивает характер случайной величины. Объясняется это тем, что отклонения каждой из величин от своих математических ожидании могут быть как положительными, так и отрицательными, а в среднем арифметическом они взаимно погашаются.

Теорема Чебышева справедлива не только для дискретных, но и для непрерывных случайных величии.

Теорема Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p. Можно ли предвидеть какова будет примерно относительная частота появлений события? Положительный ответ на этот вопрос дает теорема, доказанная Яковом Бернулли, которая получила название «закона больших чисел» и положила начало теории вероятностей как науке.

Теорема Бернулли. Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянна, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико.

Другими словами, если ε сколь угодно малое положительное число, то при соблюдении условий теоремы будет иметь место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Практическое значение теоремы Бернулли заключается в том, что она раскрывает те условия, при которых вероятность появления события становится сколь угодно близкой к единице (или к нулю), и утверждает устойчивость относительной частоты при постоянных условиях опыта.

Практика требует, чтобы мы располагали надежными данными о достоверности или невозможности наступления интересующих нас событий. Огромный опыт, накопленный человечеством, свидетельствует, что явления, имеющие вероятность, весьма близкую к единице, принято считать практически достоверными. События, вероятность осуществления которых очень мала (близка к нулю), наступают очень редко. Их принято считать практически невозможными. Но эти соображения не могут найти практического применения, пока они не обоснованы необходимыми расчетами. Здесь выявляется особая практическая важность закона больших чисел, раскрывающего те условия, при которых вероятность появления события становится сколь угодно близкой к единице (или к нулю).

Приведенные выше теоремы и неравенства дают ответы на ряд вопросов: начиная с какого числа испытаний заданная вероятность отклонения будет находиться в требуемых границах; какова граница возможного отклонения при заданных числе испытаний и вероятности; при каком соотношении между объемами выборки и всей совокупности будет обеспечена заданная вероятность допустимого отклонения выборочной средней от общей средней и т. д.

Понятие о теореме Ляпунова

В теории вероятностей некоторые весьма общие достаточные условия для сходимости распределения суммы независимых случайных величин к нормальному закону устанавливает теорема Ляпунова.

Приведем одну из простейших форм этой теоремы.

Если $X_1, X_2, ... X_i, ..., X_n$ – независимые случайные величины, имеющие один и тот же закон распределения с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2, то при неограниченном увеличении n закон распределения суммы $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ неограниченно приближается к нормальному.

Сущность теоремы Ляпунова заключается в том, что сумма n независимых случайных величин, заданных произвольными распределениями, имеет распределение, которое по мере возрастания числа n стремится к нормальному при условии, что влияние каждой случайной величины невелико по сравнению с их суммарным влиянием. Значительное число случайных явлений, встречающихся в природе, протекает именно по такой схеме. В связи с этим теорема Ляпунова имеет большое значение, а нормальный закон является одним из основных в теории вероятностей.

Например, производится измерение некоторой физической величины с помощью измерительного прибора. Любое измерение дает лишь приблизительный результат, так как на него оказывают влияние очень многие случайные факторы (изменение температуры, колебания атомов, несовершенство органов зрения наблюдателя и др.). Каждый из этих факторов порождает ничтожную частную погрешность. Поскольку число факторов очень велико, совокупное их влияние дает уже заметную суммарную погрешность. Рассматривая суммарную погрешность как сумму очень большого числа взаимно независимых частных погрешностей, мы можем заключить, что суммарная погрешность будет иметь распределение вероятностей, близкое к нормальному. Опыт подтверждает справедливость такого заключения.