ТЕМА №7
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОШИБОК (ПОГРЕШНОСТЕЙ)

ПРОГРАММНЫЕ ВОПРОСЫ:

7.1. Погрешности измерений и их виды.
7.2. Абсолютная и относительная погрешности, класс точности.
7.3. Прямые (непосредственные) измерения. Оценка случайных погрешностей прямых измерений.
7.4. Косвенные измерения. Оценка случайных погрешностей косвенных измерений.
7.5. Выражение результатов анализа. Построение графиков.

7.1. Погрешности измерений и их виды

Теория ошибок – изучение и оценка погрешностей в измерениях. Опыт показывает, что ни одно измерение, как бы тщательно оно ни проводилось, не может быть совершенно свободно от ошибок. Поскольку в основе любой науки и ее применений лежат измерения, исключительно важно уметь рассчитывать эти ошибки и сводить их к минимуму.

Целью любого измерения некоторой физической величины является получение ее истинного значения. Однако это весьма непростая задача из-за различных ошибок (погрешностей), неизбежно возникающих при измерениях.

Все измерения делятся на прямые и косвенные. ***Прямые измерения*** производятся с помощью приборов, которые непосредственно измеряют исследуемую величину. При ***косвенных измерениях*** определяемую величину вычисляют по некоторой формуле, а параметры, входящие в эту формулу, находят путем прямых измерений. Погрешность, возникающая при прямых измерениях, естественно, ведет к появлению ошибки косвенно определяемой величины.

Все ошибки разделяют на *систематические, случайные и грубые (промахи).*

Систематические ошибки зависят от неправильных показаний измерительных приборов, неправильно градуированных приборов, мерных колб, пипеток, бюреток, невыверенных разновесов и др. Систематические ошибки должны быть устранены. Для этого перед работой все приборы необходимо прокалибровать, неисправные заменить на исправные и т. д. В показания выверенных приборов следует внести соответствующие поправки.

Случайные ошибки возникают от различных помех, несовершенства органов чувств экспериментатора и других случайных причин.

Ограниченная точность приборов, изменение условий, при которых проводится опыт (особенно это имеет значение при параллельных определениях), также приводят к возникновению случайных ошибок.

Грубые ошибки в основном связаны с субъективными свойствами экспериментатора: невнимательностью и неряшливостью, занятием посторонними делами во время работы и др. Это приводит к неверным отсчетам, неправильным записям. При обработке результатов анализа грубые ошибки во внимание не принимают — их отбрасывают.

7.2. Абсолютная и относительная погрешности, класс точности

Во всякой экспериментальной работе большое значение имеет точность измерений, воспроизводимость и правильность результатов анализа. Опыт показывает, что любая измеряемая величина имеет свою ошибку; это обусловлено несовершенством приборов, их ограниченной точностью, влиянием внешних условий, загрязнениями, неправильно проведенными записями и пр.

Кроме того, при измерениях могут появляться ошибки, зависящие от ряда причин, природа которых остается неизвестной. Поэтому в результате эксперимента аналитик всегда устанавливает только приближенное значение определяемой величины, но никогда не может получить истинного ее значения. Вследствие этого измеряемая величина имеет некоторую ошибку, величину которой принято определять как *абсолютную и относительную ошибки (погрешности).*

Абсолютной погрешностью Δx измеряемой величины называют разницу между полученным результатом измерения $x_{изм}$ и истинным (или более достоверным) значением $x_{ист.}$ определяемой величины:

$$x_{изм.} - x_{ист.} = \Delta x$$

Абсолютную погрешность определяют в абсолютных единицах, ее размерность отвечает размерности измеряемой величины.

Относительной погрешностью ε измеряемой величины называют отношение абсолютной погрешности Δx к точному значению $x_{ист}$ определяемой величины:

$$\varepsilon = \frac{|x_{изм.} - x_{ист.}|}{x_{ист.}}$$

Относительная погрешность является отношением двух величин одной и той же размерности, поэтому относительные погрешности — всегда безразмерные величины. Их, как правило, выражают в процентах.

Точностью измерительного прибора называется та наименьшая величина, которую можно вполне надежно определить с его помощью.

Точность указывается либо на самом приборе, либо в прилагаемом к нему паспорте. Если точность прибора неизвестна и измерения проводятся путем сравнения измеряемой величины с какой-либо шкалой, то точность прибора определяется половиной цены наименьшего деления шкалы прибора (например, при измерении длины линейкой или температуры термометром). Если измерения проводятся прибором, снабженным нониусом (например, штангенциркулем), точность прибора принимается равной разности между ценой деления прибора и ценой деления нониуса, т. е. точностью нониуса (так, точность штангенциркуля равна 0,1 мм).

При измерении с помощью прибора полученный результат отличается от истинного значения измеряемой величины и может быть больше или меньше его. Поэтому величину погрешности измерения записывают со знаками *плюс и минус*. Например, термометр с ценой деления 0,1°С показывает температуру 36,6°С. Абсолютная погрешность измерения $\Delta t = \pm 0{,}05$ °С, следовательно, измеряемая температура равна одному из чисел между 36,55 и 36,65°С. Результат измерения записывается в виде $t = (36{,}6 \pm 0{,}05)$°С.

Пусть значение $z = f(x, y)$ может быть рассчитано по измеренным с помощью приборов значениям величин x и y, абсолютные погрешности которых Δx и Δy. Абсолютная погрешность величины z рассчитывается по формуле

$$\Delta z = |dz| = |f'_x(x, y)|dx + |f'_y(x, y)|dy$$

где $dx = |\Delta x|$, $dy = |\Delta y|$ всегда положительны.

Относительная погрешность величины z определяется как $\Delta z/z$ и обычно выражается в процентах.

Классом точности или ***приведенной относительной погрешностью*** электроизмерительного прибора называют выраженное в процентах отношение максимальной абсолютной погрешности Δx к наибольшему значению измеряемой величины x_{max} (предел измерения), которое можно определить данным прибором:

$$k = \frac{\Delta x \cdot 100}{x_{\max}}, \quad \text{откуда} \quad \Delta x = \frac{k \cdot x_{\max}}{100}.$$

Отношение абсолютной погрешности к значению измеряемой величины определяет относительную погрешность, которая и используется в качестве характеристики точности прибора. Если относительная погрешность определена в долях (процентах) диапазона измерения, то ее называют ***приведенной погрешностью***. По ее величине и судят о классе точности прибора. Относительная погрешность зависит от величины отсчета по прибору:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100 = \frac{k \cdot x_{\max}}{x}.$$

7.3. Прямые (непосредственные) измерения. Оценка случайных погрешностей прямых измерений

Для надежности оценки случайных погрешностей необходимо выполнить достаточно большое количество измерений *n*. Допустим, что в результате непосредственных измерений получены результаты x_1, x_2, x_3, …, x_n. Наиболее вероятное значение определяется как среднее арифметическое, которое при большом числе измерений совпадает с истинным значением:

$$\bar{x} = x_{ист.} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Затем определяют среднюю квадратичную ошибку отдельного измерения:

$$S = \sqrt{\frac{\left(\bar{x} - x_1\right)^2 + \left(\bar{x} - x_2\right)^2 + \ldots + \left(\bar{x} - x_n\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{x} - x_i\right)^2}{n-1}}\ .$$

При этом можно оценить наибольшую среднюю квадратичную ошибку отдельного измерения: $S_{наиб.} = 3S$.

Следующий этап заключается в определении средней квадратичной ошибки среднего арифметического:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\bar{x} - x_i\right)^2}{n(n-1)}}\ .$$

Ширина доверительного интервала около среднего значения $\bar{x}$ измеряемой величины будет определяться по абсолютной погрешности среднего арифметического:

$$\Delta\bar{x} = t_{\gamma,n} S_{\bar{x}} = t_{\gamma,n}\frac{S}{\sqrt{n}},$$

где $t_{\gamma,n}$ – так называемый коэффициент Стьюдента для числа наблюдений *n* и доверительной вероятности γ (табличная величина).

Обычно доверительная вероятность в условиях учебной лаборатории выбирается 0,95 или 95%. Это значит, что при многократном повторении опыта в одних и тех же условиях, ошибки в 95 случаях из 100 не превысят значения $\Delta\bar{x}$.

Интервальной оценкой измеряемой величины *x* будет доверительный интервал $\left|\bar{x} - \Delta\bar{x}\,;\, \bar{x} + \Delta\bar{x}\right|$, в который попадает её истинное значение с заданной вероятностью γ. Результат измерения записывается:

$$x = \bar{x} \pm \Delta\bar{x}\ .$$

Эту запись можно понимать как неравенство: $\bar{x} - \Delta\bar{x} \le x \le \bar{x} + \Delta\bar{x}$.

Относительная погрешность: $\varepsilon = \frac{\Delta\bar{x}}{\bar{x}} \cdot 100\%$; ε≤ 5% в условиях учебной лаборатории.

7.4. Косвенные измерения. Оценка случайных погрешностей косвенных измерений

Если величину y измеряют косвенным методом, т.е. она является функцией n независимых величин $x_1, x_2, ..., x_n$: $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, а значит $\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$. Средняя квадратичная ошибка среднего арифметического определяется по формуле:

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} S_{\bar{x}_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} S_{\bar{x}_2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} S_{\bar{x}_n}\right)^2},$$

где частные производные вычисляются для средних значений $\bar{x}_i$; $S_{\bar{x}_i}$ вычисляется по формуле средней квадратичной ошибки для непосредственного измерения $S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\bar{x} - x_i\right)^2}{n(n-1)}}$.

Доверительная вероятность для всех погрешностей, связанных с аргументами x_i функции y задается одинаковый (γ = 0,95), такой же она задается и для y.

Абсолютная погрешность $\Delta\bar{y}$ среднего значения $\bar{y}$ определяется по формуле:

$$\Delta\bar{y} = t_{\gamma,n} S_{\bar{y}}.$$

Тогда $y = \bar{y} \pm \Delta\bar{y}$ или $\bar{y} - \Delta\bar{y} \le y \le \bar{y} + \Delta\bar{y}$.

Относительная погрешность $\bar{y}$ будет равна $\varepsilon = \frac{\Delta\bar{y}}{\bar{y}} \cdot 100\% \le 5\%$.

Пример 7.1: С помощью вискозиметра проведено измерение коэффициента вязкости спирта. Расчетная формула имеет вид:

$$\eta = \eta_0 \frac{\rho t}{\rho_0 t_0},$$

где η, ρ, и t – вязкость, плотность и время истечения спирта из капилляра вискозиметра; η_0, ρ_0, и t_0 – вязкость, плотность и время истечения воды (η_0=0,01 *П*; ρ_0= 998,2 *кг/м*^{3}; ρ=790,1 *кг/м*^{3} – принять за точные числа). В пяти опытах получены следующие результаты:

t, с	80	79	81	83	78
t_0, *с*	48	50	47	51	46

Оценить истинное значение коэффициента вязкости с доверительной вероятностью γ=0,95. Оценить абсолютную и относительную погрешность измерения.

Решение:

Определим выборочные характеристики:

а) средние значения непосредственно измеренных величин t и t_0:

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n} = \frac{80 + 79 + 81 + 83 + 78}{5} = 80{,}2\ (c);$$

$$\overline{t_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{0i}}{n} = \frac{48 + 50 + 47 + 51 + 46}{5} = 48{,}4\ (c),$$

б) оценки среднего квадратического отклонения среднего непосредственно измеренных величин:

$$S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t})^2}\ ,$$

$$S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 4}\left[(80-80{,}2)^2 + (79-80{,}2)^2 + (81-80{,}2)^2 + (83-80{,}2)^2 + (78-80{,}2)^2\right]} = 0{,}86\ .$$

$$S_{\overline{t_0}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (t_{0i} - \overline{t_0})^2}\ ,$$

$$S_{\overline{t_0}} = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 4}\left[(48-48{,}4)^2 + (50-48{,}4)^2 + (47-48{,}4)^2 + (51-48{,}4)^2 + (46-48{,}4)^2\right]} = 0{,}93$$

Среднее значение коэффициента вязкости:

$$\bar{\eta} = \eta_0 \frac{\rho \bar{t}}{\rho_0 \overline{t_0}}\ ,$$

$$\bar{\eta} = 0{,}01 \cdot \frac{790{,}1 \cdot 80{,}2}{998{,}2 \cdot 48{,}4} = 0{,}013\ (\Pi)\ .$$

Оценка среднего квадратического отклонения среднего значения коэффициента вязкости:

$$S_{\bar{\eta}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} S_{\bar{t}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t_0} S_{\overline{t_0}}\right)^2}\ ;$$

определим частные производные:

$$\eta = \eta_0 \frac{\rho t}{\rho_0 t_0}\text{, таким образом:}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\eta_0 \rho}{\rho_0 t_0} = \frac{0{,}01 \cdot 790{,}1}{998{,}2 \cdot 48{,}4} = 0{,}0002\ ,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t_0} = -\frac{\eta_0 \rho t}{\rho_0 {t_0}^2} = -\frac{0{,}01 \cdot 790{,}1 \cdot 80{,}2}{998{,}2 \cdot 48{,}4^2} = -0{,}00027\ ,$$

$$S_{\bar{\eta}} = \sqrt{(0{,}0002 \cdot 0{,}86)^2 + (-0{,}00027 \cdot 0{,}93)^2} = 0{,}0003\ .$$

Находим значение коэффициента Стьюдента из приложения 5:

$$t_{0{,}95}(4) = 2{,}78\ .$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta\bar{\eta} = S_{\bar{\eta}} \cdot t_{\gamma}(f) = 0{,}0003 \cdot 2{,}78 = 0{,}0008\ (\Pi)\ .$$

Относительная погрешность:

$$\delta_\eta = \frac{\Delta\overline{\eta}}{\overline{\eta}} = \frac{0,0008}{0,013} = 0,06 = 6\% .$$

Истинное значение коэффициента вязкости:

$$\eta = (0,013 \pm 0,0008)\ (\Pi) .$$

7.5. Выражение результатов анализа. Построение графиков

Экспериментальные данные, беспорядочно записанные, не позволяют быстро сделать правильные выводы. От исследователя требуется представлять экспериментальные данные и полученные из них расчетные величины в виде четко и ясно записанных таблиц, графиков или уравнений, которые были бы удобны для анализа и выявления некоторых закономерностей. В зависимости от изучаемого явления и назначения полученных результатов выбор одного из указанных способов представления опытных данных или их сочетания в каждом отдельном случае решается самим экспериментатором. Часто для получения более наглядных выводов прибегают к изображению экспериментального материала графически и к использованию некоторых эмпирических формул.

Все данные, вносимые в таблицу, должны быть написаны четко и разборчиво.

Известно, что все измерения содержат по меньшей мере две переменные величины, одну из которых выбирают в качестве независимой переменной – она служит аргументом (x), а другая (или другие) является зависимой – это функция (Y), т. е. $Y = f(x)$.

Необходимо, чтобы каждая таблица имела четкое краткое название, отражающее суть изучаемого явления.

При составлении таблицы значения аргумента и соответствующих функций располагают в столбцах по порядку их возрастания или убывания. При внесении в таблицу цифр с десятичными знаками следует придерживаться правила, что запятые, отделяющие десятичные знаки от целых чисел, должны находиться на одной вертикали. При заполнении граф таблицы необходимо следить, чтобы каждая цифра содержала строго определенное число значащих цифр, не больше и не меньше, чем позволяет точность опытных данных.

Точность результатов анализа определяется точностью измерительных приборов, точностью метода и тщательностью проведенного эксперимента. Достоверность результатов анализа должна быть видна уже из записи: например, если измерение давления пара проведено с точностью ±0,5 мм, не нужно записывать результаты измерений с точностью до 0,0001 мм.

Точность вносимых в таблицу данных не может быть повышена путем различных арифметических действий, в частности, увеличением числа знаков после запятой.

При всех измерениях никогда не получают точных чисел, а всегда только приближенные значения. Производя арифметические действия с приближенными числами, следует придерживаться следующих правил:

1) при сложении и вычитании сохранять после запятой столько значащих цифр, сколько их имеется в наименее достоверном числе (2,331 + 1,24 = 3,57);

2) при умножении и делении в полученном результате сохранять столько цифр, сколько их находится в числе, измеренном с наименьшей точностью 4,31 : 2,132 = 2,02; 3,314 · 3,12 = 10,34);

3) при возведении в степень и извлечении корня в результате сохранять столько значащих цифр, сколько их было в числе, возведенном в степень, или в подкоренном числе: $(1,21)^2 = 1,46$; $\sqrt{3,14} = 1,77$;

4) при логарифмировании сохранять в мантиссе столько значащих цифр, сколько их в логарифмируемом числе: lg 1,29 = 0,11;

5) точность измерений какой-либо величины должна быть одна и та же, т. е. все числа в одной графе должны кончаться на одном общем разряде. Так, если измерения проводятся с точностью до сотых долей, то не нужно писать 4,4, 4,463 и 4,42, а следует писать 4,40; 4,46 и 4,42;

6) точность измерения разных величин, помещенных в различных графах, может быть неодинакова; определяется она в каждом случае точностью измеряемого прибора, которым пользовался экспериментатор;

7) при округлении приближенных чисел надо знать, что:

– если отбрасываемая цифра меньше пяти, то предшествующая, остающаяся в результате цифра не изменяется (3,252 – 3,25);

– если отбрасываемая цифра равна или больше пяти, то остающуюся в результате цифру увеличивают на единицу (2,448 – 2,45).

Экспериментальный материал и расчетные величины, связанные в таблицы, менее приемлемы для получения исчерпывающих данных, чем графические методы изображения.

Графический метод изображения экспериментальных данных и расчетных величин обладает преимуществом наглядного представления и взаимной связи между изучаемыми величинами. Кроме того, он позволяет непосредственно осуществлять ряд измерительных и вычислительных операций: интерполяцию, экстраполяцию, дифференцирование, интегрирование и др. Графики облегчают также сравнение величин, позволяют непосредственно обнаруживать эксперименталььные точки перегиба и минимумы, наибольшие и наименьшие скорости изменения величин, периодичность и другие особенности, которые нередко ускользают в уравнениях и недостаточно точно проявляются в таблицах.

Сущность графических методов заключается в том, что на прямоугольную систему координат наносят точки, соответствующие значениям переменных x и y, где $y = f(x)$, причем по оси абсцисс наносят значения независимой переменной x (аргумента): x_1, x_2, x_3... и т. д., а по оси ординат – значения функций y (y_1, y_2, y_3 ... и т. д.).

Обычно при нанесении точек наблюдается некоторый их разброс за счет ошибок измерения. Через полученные точки проводят кривую, причем не обязательно через самые точки, но так, чтобы она проходила по возможности ближе ко всем нанесенным точкам.

Как правило, график строят на миллиметровой бумаге, а иногда на логарифмической или полулогарифмической. Масштабы осей следует выбирать так, чтобы координаты любой точки графика могли быть определены быстро и легко. Например, берут такой масштаб, в котором 1 см разделен на десять равных частей (мм), и это расстояние принято за одну, две, ...пять и т. д. единиц, или эти значения умножены на $10^{\pm n}$, где n — целое число. Следует иметь в виду, что очень мелкий масштаб будет способствовать уменьшению точности, а крупный связан с лишней потерей времени при построении графика. Для удобства пользования графиком на каждой координатной оси необходимо поставить название представляемой ею величины и единицы, в которых она измеряется.

Масштаб, при котором пользоваться графиком затруднительно, считается неудачным.

Построение графика не обязательно начинать от начала координат, если это не требуется специальными соображениями. Кривая на графике должна занимать почти все поле чертежа. Для этого шкалы x и y должны начинаться с того значения, которое является ближайшим к наименьшему округленному, и кончаться ближайшим к наибольшему округленному значению данной величины. Например, если x меняется в пределах 0,46 – 0,92 единиц, то ось абсцисс целесообразно ограничить слева значением 0,4, а справа – значением 1,0.

От выбора масштаба для нанесения на осях координат значений x и y зависит форма кривой. Поэтому соотношение в масштабах по координатным осям имеет существенное значение для формы графика. Его следует выбирать таким, чтобы кривая была не очень крутой и не очень пологой. Если не соблюдать этого условия, то некоторые участки кривой, которым соответствуют максимумы, или точки перегиба, будут представлены неотчетливо, график будет менее наглядным и уменьшится точность отсчета по графику.

Обычно рекомендуют выбирать масштабы такими, чтобы прямая была наклонена к оси абсцисс под углом, близким к 45°.

При построении графика для установления хода кривой достаточно брать на протяжении всего интервала измерений около 10 – 15 точек. Но если на кривой намечается перегиб, то вправо и влево от него точки следует наносить значительно чаще, чтобы установить его определенность.

При построении графика иногда бывает, что одна или две точки сильно удаляются от хода кривой. В этих случаях надо сначала проверить вычисления и если в них окажутся ошибки, измерения следует повторить. При невозможности их повторения эти точки приходится считать ошибочными и не принимать во внимание.

Графические изображения результатов измерений не только дают наглядное представление о взаимной зависимости исследуемых величин, но одновременно могут служить для измерительных целей, так как по градуированному графику можно находить значения одной величины, если значения других известны.