ТЕМА №8
СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

ПРОГРАММНЫЕ ВОПРОСЫ:

8.1. Понятие статистической гипотезы. Нулевая и альтернативная гипотезы. Общая постановка задачи проверки гипотез.
8.2. Ошибки первого и второго рода. Уровень значимости.
8.3. Статистический критерий. Критические области.
8.4. Зависимые и независимые выборки. Сравнение дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей.
8.5. Сравнение средних двух нормальных генеральных совокупностей при известных дисперсиях
8.6. Критерий Стьюдента. Сравнение средних двух нормальных генеральных совокупностей при неизвестных одинаковых дисперсиях
8.7. Критерий знаков.
8.8. Проверка гипотезы о равенстве генеральных дисперсий нескольких нормальных генеральных совокупностей.

8.1. Понятие статистической гипотезы. Нулевая и альтернативная гипотезы. Общая постановка задачи проверки гипотез

При решении прикладных задач, имеющих вероятностную постановку, зачастую необходимо установить неизвестный закон распределения генеральной совокупности, в других случаях при известном законе распределения требуется уточнить параметры распределения, равенство их определенному числу и сравнить либо параметры по различным выборкам, либо сами выборки.

В подобных случаях выдвигаются определенные гипотезы, например «закон распределения генеральной совокупности, является биномиальным» или «среднее генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону, равно нулю» и т.д. Возможны и другие гипотезы относительно параметров и выборок.

Статистической гипотезой называют предположение о неизвестном законе распределения генеральной совокупности либо о параметрах известных распределений. Статистическая гипотеза проверяется исходя из выборочных данных статистическими методами. К статистической проверке гипотез сводятся задачи сравнительной проверки и оценки различных процессов: эффективности лечения, продолжительности болезни и восстановительного периода, тяжести заболевания, сравнения лечебно-диагностических методик, различных характеристик процесса, препаратов и медицинской техники, экономичности, мер профилактики и т.д.

Утверждения типа «В 2023 г. Земля может сойти со своей орбиты» (Нострадамус), «Тысячу лет назад нашу планету посещали инопланетяне» являются гипотезами, но не статистическими, так как в них не присутствуют, ни законы распределения, ни параметры.

Статистические гипотезы, не использующие допущений о конкретном законе распределения, называют ***непараметрическими*** гипотезами, в противном случае гипотезы называют ***параметрическими.*** Непараметрические гипотезы – понятие более общее, нежели параметрические, так как методика их проверки не требует знания закона распределения, что, несомненно, является их достоинством. Однако методы проверки параметрических гипотез более эффективны, так как используют большее количество информации о случайных величинах (закон распределения известен).

Статистические гипотезы бывают ***простыми*** и ***сложными.*** Простой называют гипотезу, которая полностью однозначно определяет функцию распределения (т.е. закон распределения) случайной величины. Гипотезу называют сложной, если она состоит из объединения конечного или бесконечного числа простых гипотез.

Основную гипотезу, которую намереваются проверять, называют ***нулевой гипотезой*** и обычно обозначают $\boldsymbol{H_0}$. Для каждой нулевой гипотезы обязательно существует альтернативная гипотеза, противоречащая нулевой. Такую альтернативную гипотезу называют ***конкурирующей гипотезой.*** Обозначим ее $\boldsymbol{H_1}$.

Нулевая и конкурирующая гипотезы всегда несовместны, но не обязательно образуют полную систему событий.

Выдвинутые гипотезы H_0 и H_1 проверяются на истинность на основе выборочных наблюдаемых данных статистическими методами, т.е., обладая лишь информацией по выборке (неполной информацией), о генеральной совокупности можно судить не однозначно, а с определенной вероятностью. При этом, полагая ***нулевую гипотезу*** справедливой (потому она и считается основной, что из каких-то соображений мы верим в ее истинность), мы заинтересованы в том, чтобы признать нулевую гипотезу верной, а конкурирующую гипотезу отвергнуть. Но вполне возможно, что справедлива не нулевая, а конкурирующая гипотеза, в этом случае наш интерес, наоборот, в наибольшей вероятности принятия гипотезы H_1 и, следовательно, в отвержении нулевой гипотезы H_0.

Например, пусть партию лекарств контролируют по небольшой выборке и сравнивают с нормой; тогда нулевая гипотеза H_0: выпущенная партия лекарств нестандартна (брак), а конкурирующая H_1: партия соответствует норме.

Таким образом, задача проверки гипотез заключается в том, чтобы на основании анализа выборочных данных (неполная информация) принять решение о справедливости одной из гипотез.

8.2. Ошибки первого и второго рода. Уровень значимости

При проверке гипотез из-за наличия неполной информации могут быть допущены ошибки двух видов (см. таблицу 8.1):

Ошибка первого рода заключается в том, что верная нулевая гипотеза H_0 отвергается и принимается конкурирующая ложная гипотеза H_1

Ошибка второго рода заключается в том, что ложная гипотеза H_0 принимается, хотя на самом деле верна конкурирующая гипотеза H_1.

Таблица 8.1

В действительности / *Принята гипотеза на основании исследования*	Верна гипотеза H_0, ложна H_1	Верна гипотеза H_1, ложна H_0
Принята гипотеза H_0	Гипотеза H_0 верна и принята	Гипотеза H_1 верна, но принята ложная гипотеза H_0
Принята гипотеза H_1	Гипотеза H_0 верна, но принята ложная гипотеза H_1	Гипотеза H_1 верна и принята, ложная гипотеза H_0 отвергнута

Отметим, что гипотезы H_0 и H_1 в исследовании не равноправны. Статистическая проверка осуществляется для нулевой гипотезы H_0, поэтому гипотезу H_0 и называют основной. Проверить нулевую гипотезу необходимо так, чтобы возможность ошибок обоих типов свести к минимуму.

Вероятность допустить ошибку первого рода обозначим $\boldsymbol{\alpha}$. Число α – вероятность ошибки первого рода (вероятность отклонения нулевой гипотезы, когда она на самом деле верна) – называют ***уровнем значимости.***

Аналогично вероятность допустить ошибку второго рода обозначим $\boldsymbol{\beta}$.

Вероятность не допустить ошибку второго рода (т.е. при справедливости конкурирующей гипотезы H_1, вероятность принять эту гипотезу) называют ***мощностью критерия*** (***чувствительностью критерия)***.

Мощность критерия равна $1-\beta$. Понятно, что чем больше это значение, тем лучше, качественнее работает наш критерий. В медицинских исследованиях обычно используют $\alpha = 0{,}05$ или $\alpha = 0{,}01$, а значение $\beta = 0{,}2$ или 0,1.

Задача исследователя – минимизировать обе вероятности – и α, и β. Но эти вероятности оказываются взаимосвязанными и, уменьшая одну из них при фиксированных условиях, мы неизбежно компенсируем достигнутое уменьшение ростом вероятности другой ошибки. Единственный способ одновременного уменьшения вероятностей обеих ошибок – это увеличение объема выборки (вполне естественно, что, увеличивая объем выборки, получаем больше информации о генеральной совокупности, и вероятность ошибок уменьшается).

Обычно поступают следующим образом: фиксируют уровень значимости α, т.е. задают границу вероятности отклонить нулевую гипотезу H_0, когда она верна, и пытаются провести исследование так, чтобы значение β оказалось наименьшим. Стандартными уровнями значимости α, для которых построены соответствующие таблицы, считаются числа 0,2; 0,1; 0,05; 0,02; 0,01; 0,005; 0,002; 0,001.

Естественным является желание выбрать α как можно меньше, но тогда вероятность ошибки второго рода β может оказаться слишком большой (мощность критерия невелика). Разумный компромисс между значениями α и β находят исходя из тяжести последствий каждой из ошибок. Например, пусть проверяется гипотеза отсутствия у пациента некоторого заболевания. Признаком заболевания служит значение определенного показателя (к примеру, артериальное давление), тогда нулевая гипотеза H_0 – значение показателя в норме, т.е. пациент здоров. Конкурирующая гипотеза H_1 – значение показателя отличается от нормы, т.е. пациент болен. В этом случае ошибка первого рода – отклонение нулевой гипотезы, когда она верна, т.е. признаем человека больным, когда он на самом деле здоров. Эта ошибка приводит к некоторым неудобствам для пациента, который должен пройти дополнительное обследование или курс лечения, и обычно не грозит серьезными последствиями. Совсем иная картина в случае допуска ошибки второго рода – принять нулевую гипотезу, когда она неверна, т.е. признать человека здоровым, когда он на самом деле болен: фактически происходит отказ от лечения больного, и в этом случае последствия ошибки второго рода могут оказаться самыми плачевными.

Следовательно, в рассмотренном примере допустимо пожертвовать высоким уровнем значимости α с целью уменьшить вероятность ошибки второго рода β. Можно привести примеры других случаев, когда, наоборот, более существенным по тяжести последствий оказывается выбор наименьшего разумного значения α, а не β.

Таким образом, при выборе гипотез *нулевой гипотезой* (по сравнению с альтернативной) должна быть та, *которую более опасно ошибочно отвергнуть*.

8.3. Статистический критерий. Критические области

Для проверки принятой гипотезы используют случайную величину K, являющуюся функцией от выборочных данных и называемую статистическим критерием.

Статистический критерий – это правило (формула), позволяющее по данным выборки принять либо отвергнуть нулевую гипотезу.

Статистический критерий, являясь случайной величиной, имеет какое-то вероятностное распределение. Обычно критерий выбирают таким, чтобы он имел одно из следующих распределений: нормальное, χ-квадрат, распределение Стьюдента, распределение Фишера.

Совокупность значений, при которых нулевую гипотезу следует принять, называют ***областью принятия гипотезы.*** Совокупность значений, при которых нулевую гипотезу следует отвергнуть, называют ***критической областью.***

Поскольку все возможные значения критерия K образуют интервал, то критическая область и область принятия гипотезы также являются интервалами. Эти интервалы не могут пересекаться и, следовательно, имеются граничные точки, разделяющие данные области.

Точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы, называют ***критическими точками.*** Обозначим их $\boldsymbol{k_{кр}}$.

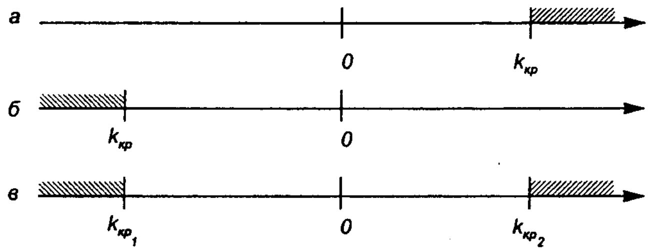

Рис. 8.1

Критическая область в зависимости от выбора $\mathbf{k_{кр.}}$ может быть ***односторонней*** (правосторонней или левосторонней) или ***двухсторонней.***

В случае, изображенном на рис. 8.1 (а), критическая область определяется неравенством $K > k_{кр}$, где $k_{кр} > 0$, и называется ***правосторонней.***

В случае, изображенном на рис. 8.1 (б), критическая область определяется неравенством $K < k_{кр}$, где $k_{кр} < 0$, и называется ***левосторонней.***

В случае, изображенном на рис. 8.1 (в), ***двусторонняя*** критическая область определяется двумя неравенствами $K < k_{кр1}$, $K > k_{кр2}$ где $k_{кр1} < k_{кр2}$. Часто двустороннюю критическую область выбирают симметричной относительно нуля, тогда $(-k_{кр1}) = \kappa_{кр2} = \kappa_{кр}$ и $|K| > k_{кр}$.

Как видим, критическая область полностью определяется одним или двумя (в случае двусторонней и несимметричной областей) критическими значениями. И здесь возникают два вопроса, первый из которых – по какому принципу выбирать критическую область; второй– каким образом определить критические значения $\kappa_{кр}$?

Принцип построения критической области таков: критическая область – эта область возможных значений критерия *К*, принимаемых крайне редко, т.е. достаточно мала вероятность, что в результате наблюдения за одной выборкой случайная величина *К*, созданная по этой выборке, примет значение из критической области. Обозначим эту вероятность попадания критерия *К* в критическую область символом α (это значение α является уровнем значимости).

Тогда критическая область при выбранном малом значении α определяется условием $P(K > k_{кр}) = \alpha$ в случае правосторонней критической области, $P(K < k_{кр}) = \alpha$ в случае левосторонней критической области. В случае двусторонней критической области $P(K < k_{кр1}) + P(K > k_{кр2}) = \alpha$.

Заметим, что в последнем равенстве критические точки $k_{кр1}$ и $k_{кр2}$ определяются неоднозначно. Если же распределение критерия *К* симметрично относительно нуля (например, распределение Стьюдента или нормальное распределение) и критические точки $-k_{кр1} = \kappa_{кр2} = \kappa_{кр}$, то $P(K < k_{кр1}) = P(K > k_{кр2})$ и, следовательно, имеем

$$P(K > k_{кр}) = \frac{\alpha}{2}; \qquad P(K < -k_{кр}) = \frac{\alpha}{2}.$$

Определив критическую область, а, следовательно, и область принятия гипотезы, по выборке вычисляем наблюдаемое значение критерия *К.* Согласно частотной интерпретации следует вывод:

– если значение *К* принадлежит области принятия гипотезы, то нулевая гипотеза H_0 не противоречит наблюдениям и принимается;

– если значение *К* принадлежит критической области, то нулевая гипотеза H_0 считается опровергнутой, и принимается конкурирующая гипотеза H_1.

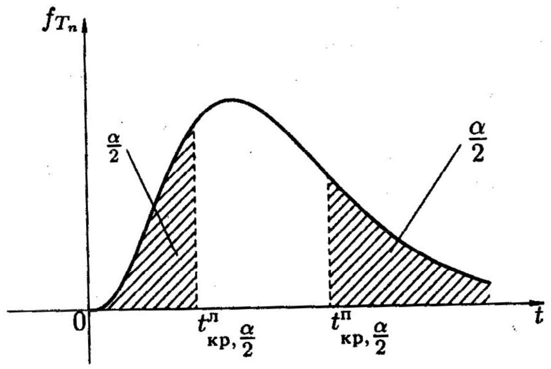

Рис. 8.2.

В случае принятия нулевой гипотезы считается, что различия между наблюдаемыми значениями и истинными обусловлены случайными причинами и являются ***незначимыми*** (непринципиальными).

В случае отторжения нулевой гипотезы говорят, что различия между наблюдаемыми значениями и теоретическими (согласно нулевой гипотезе) ***значимы***, т.е. обусловлены принципиальными причинами: ошибочностью нулевой гипотезы.

Еще раз отметим, что опровержение гипотезы H_0 на основании опыта вовсе не равноценно логическому опровержению. Вполне возможно, что нам просто не повезло с выборкой: среди множества всех возможных выборок заданного объема n попалась именно такая редкая, которая приводит значение критерия K в критическую область.

Критерии бывают параметрические и непараметрические. ***Параметрические критерии*** используются, если выборки взяты из генеральной совокупности, которая подчиняется известному, например, нормальному закону распределения. Нормальность распределения выборки должна быть статистически доказана до применения параметрических критериев.

Непараметрические критерии используют, если нет подчинения распределения выборки нормальному закону. Например, если объём выборки настолько мал, что невозможно оценить закон распределения данных в выборке. Параметрические критерии являются более мощными, чем непараметрические в обнаружении реального эффекта.

Критерии общего характера проверки статистических гипотез называют ***критериями значимости***. В случае проверки гипотез о согласии выборочного и теоретического распределений критерии значимости называют ***критериями согласия***.

Процедура проверки гипотез

Процедура проверки гипотез представляет собой правило, руководствуясь которым принимается статистически обоснованное решение о справедливости одной из них.

От исследователя, использующего статистическую проверку гипотез в прикладных задачах, требуется научиться пользоваться существующими критериями.

Проверка гипотез обычно проходит следующие этапы.

1. Исследователь набирается первичный статистический материал в виде выборок из одной или нескольких генеральных совокупностей.

2. Исследователь формулирует основную (H_0) и альтернативную (H_1) гипотезы, а также выбирает уровень значимости α (0,01 или 0,05), соответствующие целям исследования.

3. Выбирают *метод проверки*, который подходит в данной ситуации, и по соответствующим формулам *вычисляют значение статистического критерия* для имеющихся данных (выборок).

4. По таблицам, соответствующим выбранному методу, находят границу *критической области* для принятого уровня значимости.

5. Принимается решение о справедливости гипотезы H_0 или H_1. Если значение критерия, вычисленного в п.3, принадлежит критической области (п. 4), то основная гипотеза H_0 отвергается и принимается альтернативная гипотеза H_1 (различия между наблюдаемыми значениями и теоретическими значимы, т. е. обусловлены ошибочностью нулевой гипотезы). Если значения критерия не попадают в критическую область, то гипотеза H_0 принимается (различия не значимы и обусловлены случайными причинами).

Рис. 8.3

В ходе проверки статистических гипотез кроме вычисления статистического критерия К в современных статистических пакетах вычисляется также соответствующее значение *p*, где *p* – это вероятность справедливости H_0.

8.4. Зависимые и независимые выборки. Сравнение дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей.

Примеры *независимых* выборок:

1) параметры двух групп пациентов, к которым применялись различные методики лечения;

2) параметры двух групп пациентов, к одной из которых (опытная группа) применялось воздействие методики, а к другой, контрольной, – нет.

Примеры *зависимых* (связанных или сопряжённых выборок):

1) параметры одной и той же группы пациентов до и после воздействия какого-либо фактора, например, методики лечения;

2) параметры различных частей одного и того же объекта, например, состояние двух конечностей, одна из которых подвергалась лечению, а другая – нет.

Перейдем к рассмотрению некоторых наиболее популярных статистических гипотез, используемых в медицинских исследованиях, и примеров их использования.

Сравнение дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей

Во многих клинических исследованиях важной является проверка гипотезы о равенстве генеральных дисперсий двух *нормальных* выборок. Эта задача может быть решена с помощью ***критерия Фишера.***

Пусть имеются две нормальные генеральные совокупности X и Y, дисперсии которых $D(X)$ и $D(Y)$ неизвестны. По выборкам $X_1, X_2, ..., X_n$ и $Y_1, Y_2, ...Y_m$ объемов n и m соответственно требуется сравнить дисперсии. Подобные задачи возникают в случаях сравнения точности измерений, точности приборов, качества методик. Поскольку дисперсия характеризует степень сосредоточения (рассеяния) значений относительно среднего, то наилучшей характеристикой является та, у которой дисперсия меньше.

Из множества различных гипотез относительно дисперсий (соотношений между дисперсиями) в качестве нулевой гипотезы обычно выдвигают гипотезу равенства дисперсий:

$$H_0 : D(X) = D(Y)$$

Тогда для конкурирующей гипотезы остаются следующие возможности:

1) $D(X) \neq D(Y)$; 2) $D(X) > D(Y)$; 3) $D(X) < D(Y)$.

Понятно, что случаи 2) и 3) принципиального различия в методике не имеют, так как любое из этих неравенств получается из другого, если X и Y поменять местами. Таким образом, достаточно рассмотреть два случая конкурирующей гипотезы.

В нулевой гипотезе $H_0 : D(X) = D(Y)$ числа $D(X)$ и $D(Y)$ заменим характеристиками, связанными с выборками:

$$D(X) = M(S_x^2), \qquad D(Y) = M(S_y^2)$$

где S_x^2 и S_y^2 – исправленные выборочные дисперсии рассматриваемых генеральных совокупностей. Тогда $H_0 : M(S_x^2) = M(S_y^2)$.

Для проверки нулевой гипотезы используем в качестве критерия статистику F отношения двух исправленных выборочных дисперсий S_x^2 и S_y^2 с $(n-1)$ и $(m-1)$ степенями свободы соответственно.

Для определенности условимся в отношении оценок и числителем ставить большую из этих оценок, а знаменателем – меньшую. Обозначив их $S_б^2$ и $S_м^2$, получим критерий

$$F = \frac{S_б^2}{S_м^2}.$$

Далее достаточно выбрать уровень значимости a (например, наиболее распространенные в медицинских приложениях уровни значимости α = 0,05 или 0,01) и по таблице определить критические точки распределения F. И здесь возникает вопрос, какую критическую область выбрать: одностороннюю либо двустороннюю. Наш выбор зависит от вида конкурирующей гипотезы H_1. Если есть основания предполагать, что одна из дисперсий обязательно не меньше, чем другая, например $D(X) \geq D(Y)$, то

$$H_0 : D(X) = D(Y);$$

$$H_1 : D(X) > D(Y).$$

В этом случае критическая область односторонняя, а именно правосторонняя.

Если же нет оснований полагать, что одна из дисперсий обязательно больше, чем другая, то конкурирующая гипотеза

$$H_1 : D(X) \neq D(Y)$$

и критическая область оказывается двусторонней, а, следовательно, уровень значимости α должен быть поделен между двумя интервалами критической области.

Далее находим реальное значение F, наблюдаемое, а точнее, вычисляемое по выборочным данным. Обозначим его $F_{набл}$. Если окажется, что $F_{набл}$ приняло значение из критической области, то нулевую гипотезу отбрасываем и принимаем конкурирующую, в противном случае, когда $F_{набл}$ оказывается в области принятия гипотезы, нулевую гипотезу принимаем и полагаем, что она не противоречит опытным данным.

Рассмотрим оба возможных случая конкурирующей гипотезы.

Первый случай:

Пусть

$$H_0 : D(X) = D(Y);$$
$$H_1 : D(X) > D(Y).$$

Тогда

- по выборкам $X_1, X_2, ..., X_n$ и $Y_1, Y_2, ... Y_m$ вычисляем конкретные значения исправленных выборочных дисперсий S_x^2 и S_y^2;
- находим число

$$F_{набл} = \frac{S_б^2}{S_м^2},$$

где $S_б^2$ и $S_м^2$ – соответственно большее и меньшее из чисел S_X^2 и S_Y^2 (при выбранной конкурирующей гипотезе $D(X) > D(Y)$, естественно, $S_б^2 = S_x^2$, $S_м^2 = S_y^2$);

- выбираем уровень значимости α и для правосторонней критической области находим по таблице (приложение 6) граничное значение: критическую точку $к_{кр}$ (при этом f_1, f_2 - количество степеней свободы числителя и знаменателя соответственно);
- обозначим $k_{кр} = F_{кр}(\alpha; f_1 = n-1, f_2 = m-1)$; сравниваем $F_{набл}$ и $F_{кр}$;
- делаем выводы: если $|F_{набл}| > F_{кр}$, то при выбранном уровне значимости различие дисперсий значимо, нулевая гипотеза отбрасывается и принимается конкурирующая, если же $|F_{набл}| < F_{кр}$, то принимается гипотеза H_0 как не противоречащая опытным данным.

Второй случай:

Пусть

$$H_0 : D(X) = D(Y);$$
$$H_1 : D(X) \neq D(Y).$$

Тогда

- по выборкам $X_1, X_2, ..., X_n$ и $Y_1, Y_2, ... Y_m$ вычисляем конкретные значения исправленных выборочных дисперсий S_x^2 и S_y^2;
- находим число

$$F_{набл} = \frac{S_б^2}{S_м^2},$$

где $S_б^2$ и $S_м^2$ – соответственно большее и меньшее из чисел S_x^2 и S_y^2;

- выбираем уровень значимости α и находим критическую точку $k_{кр} = F_{кр}\left(\frac{\alpha}{2}; f_1, f_2\right)$;
- сравниваем $F_{набл}$ и $F_{кр}$ и делаем выводы: если $|F_{набл}| > F_{кр}$, то при выбранном уровне значимости различие дисперсий значимо, нулевая

гипотеза отвергается, если же $|F_{набл}| < F_{кр}$, то принимается гипотеза H_0 как не противоречащая опытным данным.

<u>*Пример 8.1*</u>: Пусть при лечении некоторого заболевания применяются две методики: A и B. Эффективность методик характеризуется изменением численных значений определенного показателя. Отобраны две однородные группы больных: первая численностью $n=15$ *чел.*, а вторая – $m=10$ *чел.* В первой группе (с методикой A) значения рассмотренного показателя $X_1, X_2, ..., X_{20}$, во второй (с методикой B) - $Y_1, Y_2, ...Y_{15}$. Известно, что соответствующие генеральные совокупности X и Y имеют нормальное распределение. Оказалось, что для обеих групп средние значения показателя $\overline{x}$ и $\overline{y}$ практически равны, а исправленные выборочные дисперсии $S_x^2 = 21{,}5$; $S_y^2 = 32{,}8$. Требуется сопоставить две методики лечения при уровне значимости $\alpha = 0{,}1$.

Решение: Поскольку средние значения наблюдаемого показателя в обеих группах равны, то эффективность методик в среднем одинакова. Оценим стабильность результата, т.е. различный разброс значений показателя в группах значим (вызван особенностями применяемых методик) или незначим (вызван случайными причинами, например объясняется конкретным подбором больных в группы, малым объемом выборок и т.д.).

Выдвигаем нулевую гипотезу

$$H_0 : D(X) = D(Y),$$

конкурирующую гипотезу

$$H_1 : D(X) \neq D(Y)$$

При такой конкурирующей гипотезе критическая область должна быть двусторонней и критическую точку ищем исходя из соотношения $k_{кр} = F_{кр}\left(\frac{\alpha}{2}; f_1, f_2\right)$. Так как выбранное значение $\alpha = 0{,}1$, то $\frac{\alpha}{2} = 0{,}05$. Для того чтобы воспользоваться таблицей, необходимо определить также f_1 и f_2. Поскольку большее значение исправленной выборочной дисперсии $S_y^2 = 32{,}8$ соответствует второй группе, то $f_1 = m - 1 = 9$, $f_2 = n - 1 = 14$. По таблице (приложение 6) находим критическую точку $F_{кр}\left(\frac{\alpha}{2}; f_1, f_2\right) = F_{кр}(0{,}05; 9; 14) = 2{,}65$.

Вычислим $F_{набл}$. По нашим данным $S_б^2 = S_y^2 = 32{,}8$, $S_м^2 = S_x^2 = 21{,}5$, тогда

$$F_{набл} = \frac{S_б^2}{S_м^2} = \frac{32{,}8}{21{,}5} \approx 1{,}526$$

Сравнив $F_{набл} = 1{,}526$ с $F_{кр} = 2{,}65$, констатируем, что значение $F_{набл}$ попадает не в критическую область, а в область принятия гипотезы.

Вывод: Принимается нулевая гипотеза как не противоречащая опытным данным. Следовательно, разброс значений показателя при обеих методиках не позволяет судить о значимых различиях: $D(X) = D(Y)$. Различие выборочных дисперсий S_x^2 и S_y^2 объясняется случайными причинами. Таким образом, статистически значимых различий методик не установлено.

8.5. Сравнение средних двух нормальных генеральных совокупностей при известных дисперсиях

Пусть имеются две генеральные совокупности *X* и *Y*. Исходя из выборочных данных, требуется сравнить математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$.

Подобная задача возникает при сравнении двух групп элементов, подвергшихся определенному воздействию (например, двух групп больных, проходящих курс лечения по различным методикам, или одна группа больных принимает какой-то лекарственный препарат, а другая группа – контрольная – принимает плацебо). При этом сравнение средних позволяет судить о степени воздействия, о значимости возможных эффектов воздействия или, наоборот, об их отсутствии.

Рассмотрим случай, когда генеральные совокупности *X* и *Y* имеют нормальное распределение, что в прикладных задачах бывает достаточно часто.

Данными для исследования будут служить две независимые выборки: $X_1, X_2, ..., X_n$ и $Y_1, Y_2, ... Y_m$ объемов *n* и *m* соответственно. Схема исследования – выдвижение гипотез, нулевой и конкурирующей, и использование статистики определенного вида в качестве критерия.

Нулевая гипотеза о равенстве математических ожиданий $M(X) = M(Y)$ равносильна гипотезе

$$H_0 : M(\overline{X}) = M(\overline{Y})$$

так как $M(\overline{X}) = M(X)$ и $M(\overline{Y}) = M(Y)$ ввиду несмещенности оценок математического ожидания. Поскольку значения выборочных средних *X* и *Y*, вообще говоря, различны, то необходимо проверить, значимо это различие (вызвано принципиальными соображениями) либо незначимо (вызвано случайными обстоятельствами, методами отбора именно этих, а не других элементов в выборку, малым количеством наблюдений).

Критерием для проверки гипотезы H_0 может служить статистика

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_x^2}{n} + \frac{S_y^2}{m}}}$$

Вернемся к проверке выдвинутой нулевой гипотезы. Схема действий та же самая, что и в предыдущем разделе. В противовес H_0 назначается конкурирующая гипотеза H_1. Далее по выборочным значениям вычисляем значение $Z_{набл}$, выбираем уровень значимости α и находим критическую точку. Критическое значение $Z_{кр}$ определяется соотношением:

$$\Phi(Z_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2}$$

где $\Phi(z)$ – функция Лапласа.

Сравниваем $Z_{набл}$ и $Z_{кр}$ и делаем выводы: если $|Z_{набл}| > Z_{кр}$, то при выбранном уровне значимости различие дисперсий значимо, нулевая гипотеза отвергается, если же $|Z_{набл}| < Z_{кр}$, то принимается гипотеза H_0 как не противоречащая опытным данным.

8.6. Критерий Стьюдента. Сравнение средних двух нормальных генеральных совокупностей при неизвестных одинаковых дисперсиях

Пусть имеются генеральные совокупности X и Y нормально распределенные. Требуется сравнить математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$, как и в случае, рассмотренном в параграфе 8.5. Но в отличие от указанного случая дисперсии генеральных совокупностей неизвестны. Причем удовлетворительных точечных оценок для этих дисперсий также невозможно получить, например, в случае малых выборок. Поэтому метод, рассмотренный ранее, не работает (для него дисперсии должны быть известны).

Приведем другую методику, используя взамен утраченного условия: известности дисперсий условие равенства неизвестных нам дисперсий $D(X) = D(Y)$. Это условие может быть принято из физических соображений (например, две партии препаратов, изготовленных одним и тем же коллективом работников) либо проверено (что весьма желательно) с помощью критерия Фишера.

Для сравнения $M(X)$ и $M(Y)$ в качестве нулевой гипотезы естественно выбрать

$$H_0 : M(X) = M(Y)$$

которая, равносильна гипотезе

$$H_0 : M(\overline{X}) = M(\overline{Y})$$

где X и Y – выборочные средние, найденные из независимых выборок $X_1, X_2, ..., X_n$ и $Y_1, Y_2, ...Y_m$ объемов n и m соответственно. Предполагаем числа n и m достаточно малыми (обычно не более 30).

Для проверки гипотез о равенстве генеральных средних при одинаковых генеральных дисперсиях применяется t-критерий Стьюдента, значение которого $t_{набл.}$ вычисляется по формуле:

$$t_{набл.} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n-1) \cdot S_x^2 + (m-1) \cdot S_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n \cdot m(n+m-2)}{n+m}}$$

где S_x^2 и S_x^2 – выборочные дисперсии, $\bar{x}$ и $\bar{y}$ – средние значения выборок.

Критическое значение $t_{кр}(\alpha, f = n+m-2)$ распределения Стьюдента находим по таблице (приложение 5) для заданного уровня значимости.

Сравниваем $t_{набл}$ и $t_{кр}$ и делаем выводы: если $|t_{набл}| > t_{кр}$, то при выбранном уровне значимости различие дисперсий значимо, нулевая гипотеза отвергается, если же $|t_{набл}| < t_{кр}$, то принимается гипотеза H_0 как не противоречащая опытным данным.

Данный критерий применяется в случае малых выборок, что свойственно медицинским и биологическим задачам, а это обусловливает многочисленные приложения критерия Стьюдента.

Пример 8.2: Препарат из группы антагонистов кальция – нифедипин – обладает способностью расширять сосуды, и его применяют при лечении ишемической болезни сердца. Ш. Хейл и соавторы измеряли диаметр коронарных артерий после приёма нифедипина и плацебо, и получили следующие две выборки данных диаметра коронарных артерий (в миллиметрах).

Плацебо: 2,5; 2,2;2,6;2,0;2,1;1,8;2,4;2,3;2,7;2,7;1,9;

Нифедипин:2,5;1,7;1,5;2,5;1,4;1,9;2,3;2,0;2,6;2,3;2,2.

Позволяют ли приведенные данные считать, что нифедипин влияет на диаметр коронарных артерий?

Решение:

В данной задаче необходимо исследовать, значимо или незначимо различаются средние, представленные двумя выборками. Обозначим генеральную совокупность, из которой извлечена первая выборка (плацебо), через X. Соответственно обозначим генеральную совокупность, из которой извлечена вторая выборка (нифедипин), через Y. Авторы полагали, что обе генеральные совокупности X и Y имеют нормальное распределение (эту гипотезу желательно проверить статистическими методами).

По выборкам из обеих генеральных совокупностей вычислим соответствующие выборочные характеристики:

$$\bar{x} = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} x_i = \frac{1}{11}(2{,}5 + 2{,}2 + 2{,}6 + 2{,}0 + 2{,}1 + 1{,}8 + 2{,}4 + 2{,}3 + 2{,}7 + 2{,}7 + 1{,}9) = \frac{25{,}2}{11} \approx 2{,}29;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{11}\sum_{j=1}^{11} y_j = \frac{1}{11}(2{,}5 + 1{,}7 + 1{,}5 + 2{,}5 + 1{,}4 + 1{,}9 + 2{,}3 + 2{,}0 + 2{,}6 + 2{,}3 + 2{,}2) = \frac{22{,}9}{11} \approx 2{,}08;$$

$$S_x^2 = \frac{1}{11-1}\sum_{i=1}^{11}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{10}[(2{,}5 - 2{,}29)^2 + (2{,}2 - 2{,}29)^2 + \ldots + (1{,}9 - 2{,}29)^2] = 0{,}1009;$$

$$S_y^2 = \frac{1}{11-1}\sum_{j=1}^{11}(y_j - \bar{y})^2 = 0{,}1716\,.$$

Поскольку выборки малого объема $n = m = 11$, для проверки значимости различий средних применим критерий Стьюдента. Для использования критерия необходимо иметь равные дисперсии: $D(X) = D(Y)$. В нашем случае эти дисперсии неизвестны, но данное равенство можно проверить, воспользовавшись критерием Фишера о равенстве дисперсий. Нулевая гипотеза в критерии Фишера

$$H_0 : D(X) = D(Y)$$

В качестве конкурирующей гипотезы рассмотрим

$$H_1 : D(X) \neq D(Y),$$

откуда следует, что критическая область – двусторонняя. Уровень значимости полагаем стандартным $\alpha = 0{,}05$. По таблице (прил. 6) находим критическую точку исходя из равенства:

$$k_{кр} = F_{кр}\left(\frac{\alpha}{2}; f_1, f_2\right) = F_{кр}(0{,}025;10;10) = 3{,}72$$

Вычисляем $F_{набл}$. Поскольку среди S_x^2 и S_y^2 большей дисперсией является S_y^2, то

$$F_{набл} = \frac{S_y^2}{S_x^2} = \frac{0{,}1716}{0{,}1009} \approx 1{,}701\,.$$

Таким образом, получим, что $F_{набл} < F_{кр}$, следовательно, значение $F_{набл}$ принадлежит области принятия гипотезы, и нулевая гипотеза о равенстве дисперсий принимается как не противоречащая опытным данным.

Установленный факт равенства дисперсий $D(X)$ и $D(Y)$ нормальных генеральных совокупностей позволяет сравнить средние $M(X)$ и $M(Y)$ с помощью критерия Стьюдента.

Для средних вновь выдвигаем нулевую гипотезу

$$H_0 : M(X) = M(Y)$$

и конкурирующую гипотезу

$$H_1 : M(X) \neq M(Y)$$

Критическая область – двусторонняя. Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Вычисляем наблюдаемое значение $t_{набл}$ критерия по формуле:

$$t_{набл.} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{(n-1)\cdot S_x^2 + (m-1)\cdot S_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n \cdot m(n+m-2)}{n+m}}$$

$$t_{набл.} = \frac{2{,}29 - 2{,}08}{\sqrt{(11-1)\cdot 0{,}1009 + (11-1)\cdot 0{,}1716}} \cdot \sqrt{\frac{11\cdot 11(11+11-2)}{11+11}} \approx 1{,}334\,.$$

По таблице (прил. 5) находим критическую точку исходя из равенства:

$$t_{кр}(\alpha; f) = t_{кр}(0{,}05; 11+11-2) = 2{,}09\,.$$

Сравнивая $t_{набл}$ и $t_{кр}$ делаем вывод, что $t_{набл}$ находится в области принятия гипотезы (т.к. $|t_{набл}| < t_{кр}$), следовательно, должна быть принята нулевая гипотеза $M(X) = M(Y)$ как не противоречащая опытным данным.

Вывод: В рассматриваемом примере критерий Стьюдента не выявил существенных различий в диаметрах коронарных артерий при сравнении двух групп обследуемых. Проведенный статистический анализ не позволяет считать значимым влияние нифедипина на диаметр коронарных артерий.

8.7. Критерий знаков

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ и $y_1, y_2, ..., y_n$ – две группы значений, попарно связанных между собой. ***Критерий знаков*** является критерием проверки гипотезы об однородности этих групп наблюдений, точнее, о принадлежности их к одной и той же генеральной совокупности. Математически нулевая гипотеза H_0 состоит в равенстве соответствующих функций распределения: $F_x = F_y$. Вид альтернативной гипотезы H_1 определяет критическую область:

- если $H_1: F_x \neq F_y$, то критическая область двусторонняя;
- если $H_1: F_x > F_y$, то критическая область левосторонняя;
- если $H_1: F_x < F_y$, то критическая область правосторонняя.

Рассматриваемые выборки имеют попарно связанные элементы x_i, y_i, исходя из чего на практике критерий знаков используется для наблюдений до и после эксперимента. Исследуется наличие статистически значимого сдвига в значениях после эксперимента, которому и приписывается заслуга в этом изменении значений при справедливости гипотезы H_1 и отсутствии значимого влияния на формирование значений при принятии гипотезы H_0.

Отметим, что критерий знаков является непараметрическим, т.е. может быть применен вне зависимости от распределения признака.
В критерии знаков рассматриваются соответствующие разности значений $x_i - y_i$, но сама величина разности роли не играет, учитывается

лишь знак выражения $x_i - y_i$. В случае равенства какой-то из разностей нулю, эта пара наблюдений выводится из исследования. Таким образом, исходным пунктом для применения критерия оказывается последовательность знаков «+» и «–». Можно сравнивать, например, результаты клинических исследований у 2 групп больных, или у одних и тех же больных до и после лечения. Следовательно, критерий знаков применим и к случаю качественных изменений в наблюдениях типа «лучше – хуже», «больше – меньше» и т.д., что является его несомненным достоинством.

При справедливости нулевой гипотезы

$$H_0 : F_x = F_y,$$

означающей, что совокупности однородны, а преобладание знака «+» или «–» в последовательности знаков является случайным, количества знаков «+» и «–» не должны существенно отличаться. Следовательно, для каждой пары наблюдений x_i, y_i появление того или иного знака происходит с вероятностью 0,5, а распределение случайной величины, принимающей значения от 0 до n, является биномиальным.

Пусть в серии из N опытов положительные значения Z наблюдались n_+ раз, а отрицательные – n_- раз. Тогда проверка справедливости нулевой гипотезы сводится к проверке значимости отличия n_+ или n_- от 0,5.

В математической статистике показывается, что для такой проверки следует ввести еще одну величину n_N, определяемую как наименьшее из чисел n_+ или n_-, и сравнить ее со значением критического числа $n_N^{кр}$.

Критические числа $n_N^{кр}$ определяются объемом выборки N и уровнем значимости α. В качестве критического числа $n_N^{кр}$ следует принимать целую часть числа

$$A = \frac{N-1}{2} - k\sqrt{N+1},$$

где $k = 0{,}8224$ для $\alpha = 0{,}10$ и $k = 0{,}9800$ для $\alpha = 0{,}05$.

Если $n_N > n_N^{кр}$, то нулевую гипотезу следует считать согласующейся с экспериментом. Если $n_N < n_N^{кр}$, то нулевую гипотезу отвергают.

Недостатком критерия знаков является то, что он учитывает только знак разностей сравниваемых наблюдений, не отражая величины этой разности. Поэтому критерий знаков имеет ограниченную мощность.

Пример 8.3: Проведено 100 опытов по изучению влияния некоторого физического фактора на величину артериального давления у двух групп животных, причем от опыта к опыту уровень фактора изменялся и регистрировались различия артериального давления у двух животных (по одному из каждой группы). При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ оценить значимость различия в действии данного фактора на указанные группы животных, если в серии из 100 опытов положительная разность давлений наблюдалась 48 раз, а отрицательная – 44 раза.

Решение:

В данном случае $n_N = 44$. Находим критическое значение:

$$A = \frac{100-1}{2} - 0{,}98\sqrt{100+1} = 39{,}6$$

следовательно, $n_N^{кр} = 39$. Поскольку $n_N > n_N^{кр}$, то отвергать нулевую гипотезу нет оснований, и при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ различие в действии изучаемого фактора на рассматриваемые группы животных можно считать незначимым.

8.8. Проверка гипотезы о равенстве генеральных дисперсий нескольких нормальных генеральных совокупностей

Критерий Кочрена сравнения дисперсий нескольких нормальных генеральных совокупностей

Пусть X_i обозначает i-ю генеральную совокупность. Известно, что m генеральных совокупностей $X_1, X_2, ..., X_m$ имеют нормальное распределение ($m > 2$). При уровне значимости α требуется проверить гипотезу о равенстве дисперсий рассматриваемых генеральных совокупностей (также говорят об однородности дисперсий):

$$H_0 : D(X_1) = D(X_2) = ... = D(X_m).$$

Для проверки этой нулевой гипотезы взяты выборки одного и того же объема n каждая и вычислены исправленные выборочные дисперсии $S_1^2, S_2^2, ..., S_m^2$, которые, как известно, имеют число степеней свободы $f = n - 1$. Численные значения исправленных выборочных дисперсий соответственно обозначим $s_1^2, s_2^2, ..., s_m^2$.

В качестве критерия проверки выдвинутой гипотезы используем статистику

$$K = \frac{S_{\max}^2}{S_1^2 + S_2^2 + ... + S_m^2},$$

называемую критерием Кочрена (Кохрана), где $S_{\max}^2$ – та из исправленных выборочных дисперсий, значение которой наибольшее.

Критическое значение распределения Кочрена $K_{кр}(\alpha, f, m)$ определяем по таблице (приложение 7).

Если $K_{набл} < K_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается, в противном случае $K_{набл} > K_{кр}$ делаем вывод, что дисперсии в рассматриваемых генеральных совокупностях различны. Уточнить, в каких именно генеральных совокупностях различаются дисперсии, можно с помощью того же или другого критерия, сравнивая меньшее количество выборок, например сравнивая выборки попарно.

В случае справедливости гипотезы *H₀* в качестве оценки генеральной дисперсии используют среднее арифметическое значение имеющихся *m* исправленных выборочных дисперсий.

<u>*Пример 8.4:*</u> Три лаборатории провели анализ 9 проб исследуемого препарата для определения в нем процентного содержания эфирного масла. Исправленные выборочные дисперсии оказались: в первой лаборатории $s_1^2 = 0{,}037$, во второй лаборатории $s_2^2 = 0{,}063$, в третьей лаборатории $s_3^2 = 0{,}052$. Предполагая, что случайная величина – процентное содержание эфирного масла в препарате имеет нормальное распределение, требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить гипотезу об однородности дисперсий.

Решение.

Процентное содержание эфирного масла в препарате – это случайная величина (генеральная совокупность). Для каждой из лабораторий рассматриваемая генеральная совокупность своя. Таким образом, имеются три генеральные совокупности X_1, X_2, X_3, из которых извлечены по одной выборке одинакового объема $n = 9$. По вычисленным значениям s_1^2, s_2^2, s_3^2 проверим нулевую гипотезу однородности дисперсий:

$$H_0 : D(X_1) = D(X_2) = D(X_3).$$

Так как все три генеральные совокупности по условию нормальны, а выборки одинакового объема $n = 9$, то можно применить критерий Кочрена.

Вычислим наблюдаемое значение критерия

$$K = \frac{S_{\max}^2}{S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_m^2} = \frac{0{,}063}{0{,}037 + 0{,}063 + 0{,}052} \approx 0{,}4257$$

Критическую точку найдем из приложения 7 при $\alpha = 0{,}01$:

$$K_{кр}(\alpha, f, m) = K_{кр}(0{,}01;8;3) = 0{,}7107$$

(напомним, что $f = n - 1$, где *n* – объем каждой из выборок; *m* – количество выборок).

Так как $K_{набл} < K_{кр}$ (0,4257 < 0,7107), то на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ различие выборочных дисперсий незначимо, и гипотеза об однородности дисперсий принимается. Оценка дисперсии – одна и та же для любой из трех рассматриваемых генеральных совокупностей – это среднее арифметическое

$$s^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + s_2^3}{3} = \frac{0,037 + 0,063 + 0,052}{3} \approx 0,0493.$$

Критерий Бартлетта сравнения дисперсий нескольких генеральных совокупностей

Пусть имеется *m* нормальных генеральных совокупностей. Обозначим их $X_1, X_2, ..., X_m$. При уровне значимости *α* требуется проверить нулевую гипотезу о равенстве соответствующих генеральных дисперсий:

$$H_0 : D(X_1) = D(X_2) = ... = D(X_m),$$

называемую также гипотезой об однородности дисперсий.

Из каждой генеральной совокупности X_i извлечена выборка объема n_i. Если все n_i равны, то для проверки H_0 можно использовать критерий Кочрена. В противном случае, когда выборки, вообще говоря, разного объема, нам необходим другой критерий проверки нулевой гипотезы. Рассмотрим критерий Бартлетта.

Пусть по выборкам найдены исправленные выборочные дисперсии $S_1^2, S_2^2, ..., S_m^2$, при этом каждая статистика S_i^2 имеет число степеней свободы $k_i = n_i - 1$. Обозначим суммарное число степеней свободы по всем выборкам

$$k = k_1 + k_2 + ... + k_m$$

и среднее арифметическое исправленных выборочных дисперсий, взвешенное по числу степеней свободы,

$$\overline{S}^2 = \frac{1}{k}(k_1 S_1^2 + k_2 S_2^2 + ... + k_m S_m^2/$$

Введем еще две величины:

$$V = k \ln \overline{S}^2 - \sum_{i=1}^{m} k_i \ln S_i^2);$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(m-1)}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} - \frac{1}{k}\right)$$

Заметим, что *V* – статистика, т.е. случайная величина, а *C* – постоянная, причем С > 1.

Отношение

$$B = \frac{V}{C}$$

является критерием Бартлетта проверки гипотезы H_0. При справедливости нулевой гипотезы критерий *B* имеет приближенное распределение χ^2 с *(m-1)* степенями свободы.

Критическую точку $B_{кр}(\alpha, f = m-1)$ при выбранном уровне значимости α найдем из приложения 8.

Если $B_{набл} < B_{кр}$, то нулевая гипотеза о равенстве дисперсий принимается; если же $B_{набл} > B_{кр}$, то различие выборочных дисперсий признается значимым и гипотеза H_0 отвергается.

В случае принятия нулевой гипотезы оценка генеральной дисперсии – это значение $\bar{s}^2$, вычисленное по конкретным значениям выборочных дисперсий.

Замечание. Критерий Бартлетта достаточно резко реагирует на отклонения от нормального закона распределения, поэтому, если имеются сомнения в типе распределения, лучше использовать выборки одинакового объема и обратиться к критерию Кочрена.

Пример 8.5: Три лаборатории проводили анализ исследуемого препарата на процентное содержание в нем эфирного масла. Первая лаборатория исследовала 10 проб, вторая – 12 и третья – 17 проб. Исправленные выборочные дисперсии оказались соответственно $s_1^2 = 0{,}045$, $s_2^2 = 0{,}033$, $s_3^2 = 0{,}040$.

Предполагая, что процентное содержание эфирного масла в данном препарате имеет нормальное распределение, требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить гипотезу об однородности дисперсий.

Решение.

Процентное содержание эфирного масла в препарате – случайная величина, т.е. генеральная совокупность, своя персональная для каждой лаборатории. Поскольку объемы выборок для каждой генеральной совокупности различны, для проверки гипотезы H_0, равенства генеральных дисперсий воспользуемся критерием Бартлетта.

Так как используется много данных, оформим их в виде таблицы:

Номер генеральной совокупности i	Объем выборки n_i	Число степеней свободы k_i	s_i^2	$k_i s_i^2$	$\ln s_i^2$	$k_i \ln s_i^2$
1	10	9	0,045	0,405	-3,101	-27,910
2	12	11	0,033	0,363	-3,411	-37,523
3	17	16	0,040	0,640	-3,219	-51,502
		$k = 36$	$\bar{s}^2 = 0{,}039$		$\ln s^2 = -3{,}2414$	$\sum = -116{,}935$

Исходя из найденных значений вычисляем наблюдаемое значение V: $V = 0{,}245$, тогда $B_{набл} = \dfrac{0{,}245}{C}$.

Из приложения 8 находим $B_{кр}(\alpha, f = m-1) = B_{кр}(0{,}01;2) = 9{,}2$.

Заметим, что постоянная С всегда больше 1, следовательно,

$$B_{набл} = \frac{0{,}245}{C} < 0{,}245$$

и разумеется, $B_{набл} < 9{,}2$. Следовательно, вычислять значение постоянной *C* нет необходимости.

Значение $B_{набл}$ попадает в область принятия гипотезы, тем самым статистически доказано равенство дисперсий всех трех генеральных совокупностей. Оценка их обшей дисперсии равна $\bar{s}^2 = 0{,}039$.