

ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ №3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Выяснить, являются ли решением данных дифференциальных уравнений указанные функции?

- | | |
|-------------------------------------------------------|-------------------------|
| 1. $y'' + y + 2\sin x = 1$ | $y = x \cos x + 1$ |
| 2. $y'' - x \cdot y''' = 0$ | $y = \frac{x^3}{3} - x$ |
| 3. $x \cdot y' \cdot \ln x = x - y$ | $y = \frac{x}{\ln x}$ |
| 4. $y'' - y' + y = e^x \sin x$ | $y = e^x \cos x$ |
| 5. $y' \cdot y''' - x \cdot y'' + 1 = 0$ | $y = \frac{x^3}{3} - x$ |
| 6. $x \cdot y' - \frac{y}{2} = x \cdot y \cdot \ln 2$ | $y = 2^{x\sqrt{x}}$ |
| 7. $y' + \frac{y''}{2} - y = 0$ | $y = e^x \cos x$ |
| 8. $y \sin x + y''(x+1) = 0$ | $y = x + \sin x$ |

Найти общие и частные решения дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными:

- | | | |
|--------------------------------------|------------------|--------------|
| 9. $y' \cdot y = x - 2$ | если $y = 1$ | при $x = 0$ |
| 10. $y' = \frac{y}{x+3}$ | если $y = e$ | при $x = -2$ |
| 11. $4xdy - 3ydx = 0$ | если $y = e$ | при $x = 1$ |
| 12. $y' = \cos^2 y$ | если $y = \pi/4$ | при $x = 0$ |
| 13. $y' = \sqrt{2y+3}$ | если $y = 1/2$ | при $x = 0$ |
| 14. $y' \cdot y^2 - (y^3 - 2)^2 = 0$ | если $y = 1$ | при $x = 0$ |
| 15. $ydy - \ln x dx = 0$ | если $y = 0$ | при $x = 1$ |
| 16. $(x-1)dy - 2ydx = 0$ | если $y = e^2$ | при $x = 2$ |

Найти общие решения однородных дифференциальных уравнений первого порядка:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 17. $2xyy' = y^2 - 4x^2$ | 18. $xdy - ydx = xdx$ |
| 19. $y^2 - 4xy + 4x^2 y' = 0$ | 20. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$ |
| 21. $xydx - (x^2 + y^2)dy = 0$ | 22. $xy' = y - xe^{y/x}$ |
| 23. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$ | 24. $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$ |

Найти общие решения дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка:

25. $y'' = \sin x$

26. $y'' = \sin x \cos x$

27. $y'' = xe^{-x}$

28. $xy'' - y' = 0$

29. $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$

30. $(1-x^2)y'' - xy' = 2$

31. $y^3 y'' = 1$

32. $yy'' - (y')^2 = 0$

Найти общие и, где указано, частные решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка:

33. $y'' + 2y' + 2y = 0$

34. $y'' + y' + y = 0$

35. $y'' - 6y' + 8y = 0$

36. $y'' - 7y' + 10y = 0$

37. $y'' - 4y' + 5y = 0$

38. $y'' - y = 0$

39. $y'' - 6y' + 8y = 0$ при $x = 0, y = 0, y' = 1$

40. $y'' - 2y' + y = 0$ при $x = 1, y = 0, y' = e$

41. Скорость укорочения мышцы описывается уравнением $\frac{dx}{dt} = B(x_0 - x)$, где x_0 – полное укорочение мышцы; B – постоянная, зависящая от нагрузки; x – укорочение мышцы в данный момент. Найти закон сокращения мышцы, если в момент времени $t = 0$ величина укорочения мышцы была равно 0.

42. В ультрацентрифугах скорость смещения молекул исследуемого полимера в направлении от оси вращения выражается формулой $v = b\omega^2 x$, где b – постоянная величина, характеризующая данный полимер; ω – угловая скорость вращения центрифуги; x – расстояние от оси вращения до движущейся границы оседающего полимера. Найти уравнение движения границы полимера, если в момент времени $t = 0$ она находилась на расстоянии 0,5 см от оси вращения.

43. Если первоначально количество фермента равно 1 г, а через 1 час становится равным 1,2 г, то чему оно будет равно через 5 часов после начала брожения? Скорость приросту фермента считать пропорциональной его наличному количеству.

44. Скорости ферментативных каталитических реакций подчиняются следующему уравнению:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k(a-x)}{1+k'(a-x)},$$

где x – концентрация продукта в момент времени t ; a – начальная концентрация реагента. Найти закон зависимости изменения концентрации продукта от времени.

45. Популяция бактерий увеличивается таким образом, что удельная скорость роста в момент t (час) составляет величину $\frac{1}{1+2t}$.

Допустим, что начальной популяции соответствует $x(0) = 1000$. Какой будет популяция после 4 часов роста? После 12 часов?

46. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% от первоначального количества?

47. Определить период полураспада радия и радона, если постоянные распада данных веществ соответственно равны $1,354 \cdot 10^{-11} c^{-1}$ и $2,1 \cdot 10^{-6} c^{-1}$.

48. Имеется 1000 относительных единиц радона. Сколько действующих единиц радона останется спустя 1ч? Постоянная распада радона $\lambda = 2,1 \cdot 10^{-6} c^{-1}$.

49. Скорость растворения лекарственного вещества в таблетках пропорциональна количеству лекарства в таблетке. Известно, что при $t = 0$, $m = m_0$. Найти закон растворения таблетки (т.е. закон изменения массы), если период полурасстворения таблетки T .

50. В культуре дрожжей быстрота прироста дрожжевого фермента пропорциональна количеству, имеющемуся в наличии. В начальный момент $x = x_0$. Если количество удваивается в течение часа, то во сколько раз оно возрастет за 2,5 часа. То есть определить закон прироста дрожжевого фермента в зависимости от времени.

51. Известно, что скорость распада радия пропорциональна его конечному количеству и что половина его первоначального количества распадается в течение 1600 лет. Определить какой процент m_0 радия распадется в течение 100 лет, если первоначальное его значение равно m_0 .

52. В воде с температурой $20^\circ C$ в течение 10 минут тело охлаждается от $100^\circ C$ до $60^\circ C$. До какой температуры охладится тело за 30 минут, если по закону Ньютона скорость охлаждения пропорциональна разности температур тела и охлаждающей среды?

53. Найдите закон убывания лекарственного препарата в организме человека, если через 1 час после введения 10 мг препарата его масса уменьшилась вдвое. Какое количество препарата останется в организме после двух часов?

54. Уменьшение интенсивности света при прохождении через поглощающее вещество пропорционально интенсивности падающего света и толщине поглощающего слоя. Найдите закон убывания интенсивности света, если известно, что при прохождении слоя $l = 0,5$ м интенсивность света убывает в 2 раза.

55. Скорость роста числа микроорганизмов пропорциональна их количеству в данный момент. В начальный момент имелось 100 микроорганизмов, и их число удвоилось за 6 часов. Найти зависимость количества микроорганизмов от времени и количество микроорганизмов через сутки.