

Вращательное движение

Законы Ньютона и сохранения для поступательного движения.

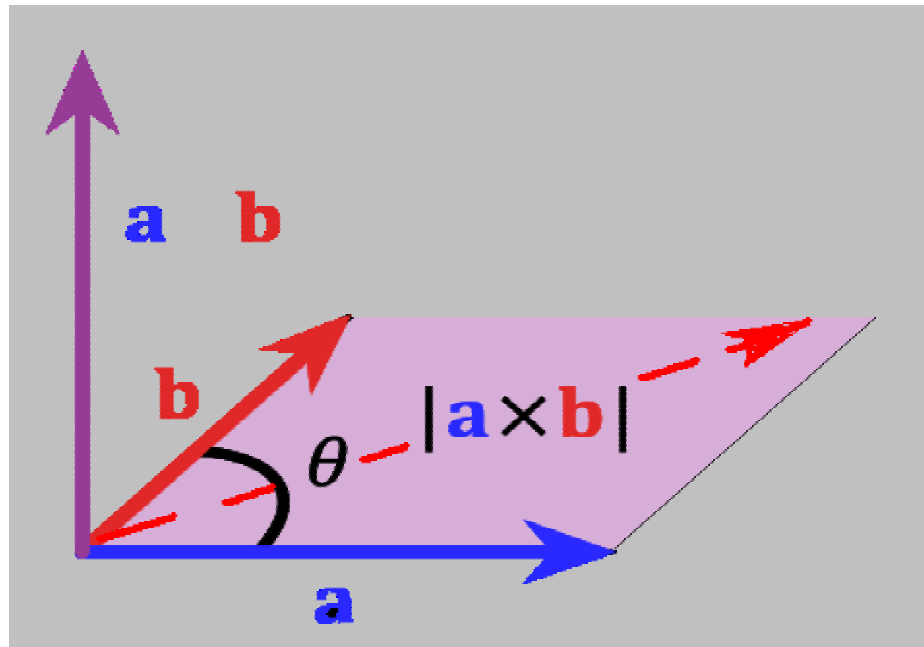
Кинематика и динамика вращательного движения. Момент силы и угловой момент.

Сохранение углового момента. Момент инерции.

Векторное произведение векторов

Векторное произведение двух векторов определяется так:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$$



Кинематика и динамика поступательного движения

Первый закон Ньютона постулирует существование **инерциальных систем отсчета**.

Скорость материальной точки – первая производная от пройденного пути по времени, ускорение – вторая производная:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \quad a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Основной закон динамики поступательного движения – **второй закон Ньютона**:

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \equiv m \vec{a} = \vec{F}$$

Более общая форма второго закона Ньютона выражает силу через импульс:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \text{где} \quad \vec{p} = m \vec{v}$$

Законы сохранения

Сохранение импульса: полный импульс всех частей замкнутой системы материальных точек (т.е. системы, не подверженной действию внешних сил) остается постоянным:

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n = \text{const}$$

Сохранение энергии: полная механическая энергия тела, находящегося под действием потенциальных сил (т.е. сил, работа которых зависит только от начального и конечного положения тела) остается постоянной:

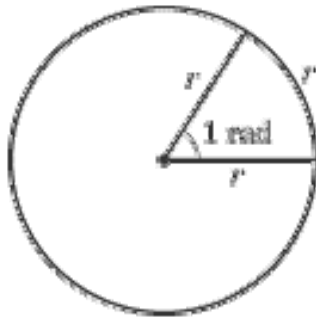
$$E_{\text{total}} = E_{\text{kinetic}} + E_{\text{potential}} = \text{const}$$

Кинематика вращательного движения. I

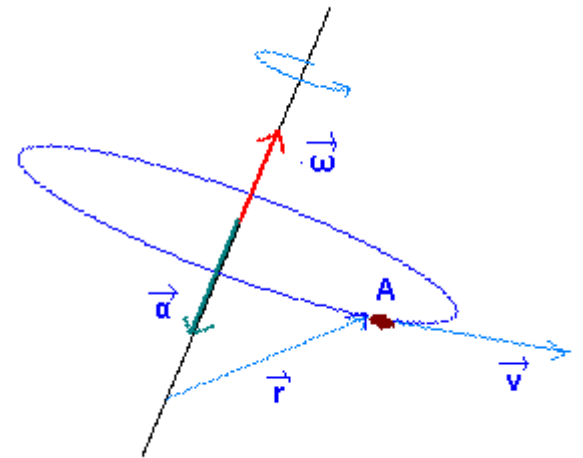
Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси удобно описывать углом вращения φ . Угловая скорость вращения – первая производная от угла по времени, угловое ускорение – вторая:

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{k} \quad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \vec{k}$$

Угол вращения измеряем в радианах



$$\varphi = 2\pi$$



$$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad [\alpha] = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

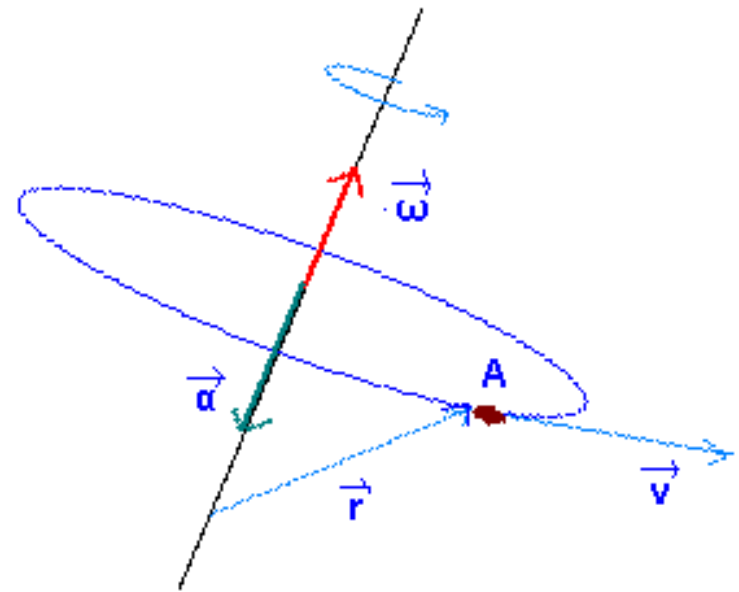
Кинематика вращательного движения. II

Но любая вращающаяся точка имеет и линейные скорость и ускорение. Они равны:

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}$$

и

$$\vec{a}(t) = \vec{\alpha}(t) \times \vec{r} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$



Радиус Земли $R = 14000 \text{ km}$, угловая скорость суточного вращения $\Omega = 2\pi/24/3600 \text{ rad/second}$, so $a = 4,6 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2$.

Момент силы и момент импульса

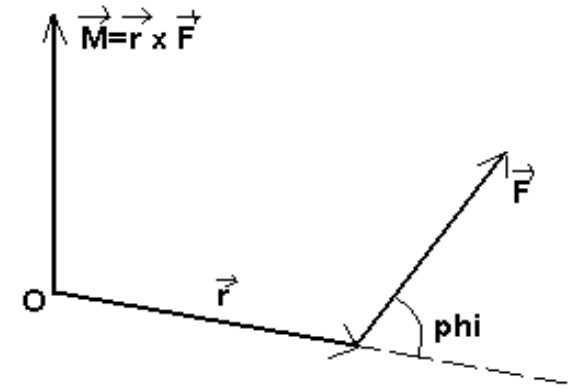
Момент силы определяется так $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ или $M = r \cdot F \cdot \sin \phi$

А момент импульса:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$$

Чему равна его производная по времени?

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$



Простейший случай: материальная точка вращается вокруг оси:

$$L = m \cdot v \cdot r = m \cdot (\omega \cdot r) \cdot r = m \cdot \omega \cdot r^2 = I \cdot \omega \Leftrightarrow I \stackrel{def}{=} m \cdot r^2$$

Здесь I - момент инерции материальной точки.

Динамика вращательного движения

Сила, действующая на каждую точку, м.б. разложена на нормальную и тангенциальную компоненты.

Тангенциальная оказывает (в отличие от нормальной) влияние на вращение:

$$\vec{F}_{i\tau} = \Delta m_i \vec{a}_i = \Delta m_i (\vec{\alpha} \times \vec{r}_i) = \Delta m_i \left(\frac{d^2 \vec{\phi}}{dt^2} \times \vec{r}_i \right)$$

or

$$|\vec{F}_{i\tau}| = \Delta m_i \cdot \alpha \cdot r_i = \Delta m_i \cdot r_i \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$$

Момент силы равен:

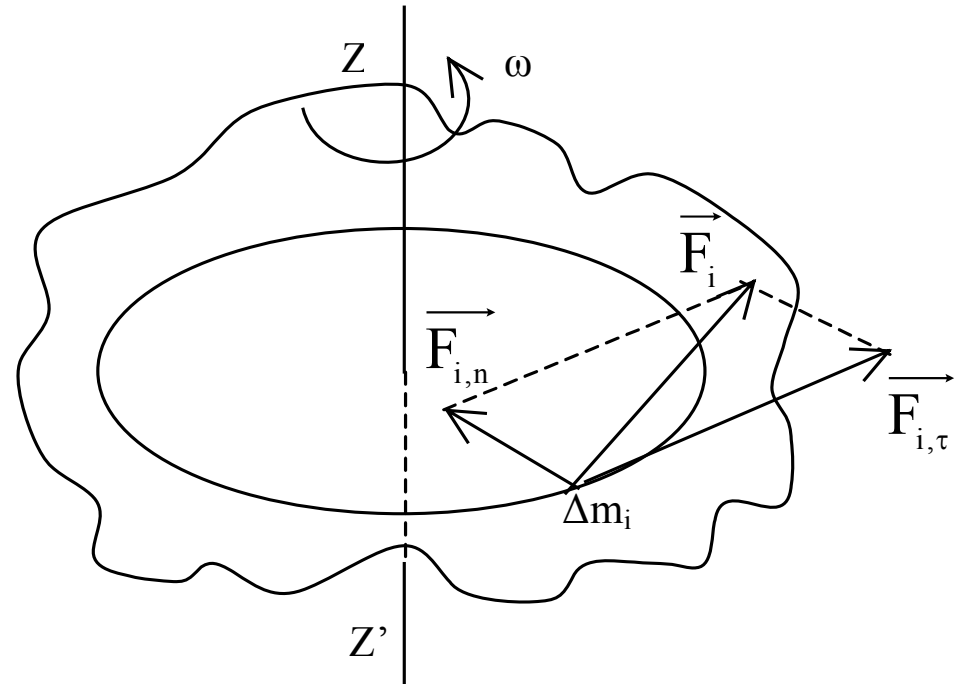
$$F_{i\tau} \cdot r_i = \Delta m_i \cdot r_i^2 \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \Delta m_i \cdot r_i^2 \cdot \alpha$$

Если положить, что

$$I = \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^N I_i$$

получаем: $\vec{M} = I\alpha = I \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$,

где $\vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i$



Моменты инерции тел различной формы

Примеры:

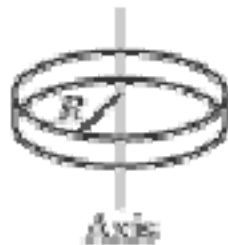
Moments of inertia

uniform sphere



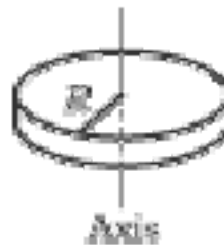
$$\frac{2}{5} MR^2$$

uniform ring



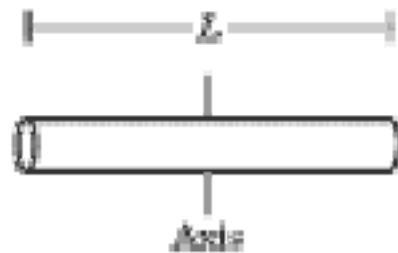
$$MR^2$$

uniform disc

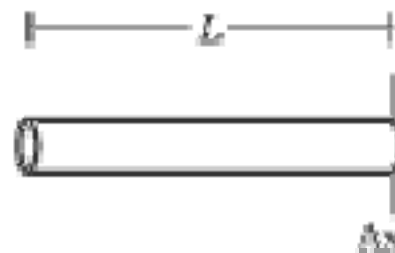


$$\frac{1}{2} MR^2$$

uniform rod



$$\frac{1}{12} ML^2$$



$$\frac{1}{3} ML^2$$

Теорема Гюйгенса-Штайнера

Момент инерции тела относительно произвольной оси вращения равен сумме момента инерции этого тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния от оси, проходящей через центр масс, до рассматриваемой оси:

$$I_a = I_c + ma^2$$

Пример для однородного бруса:

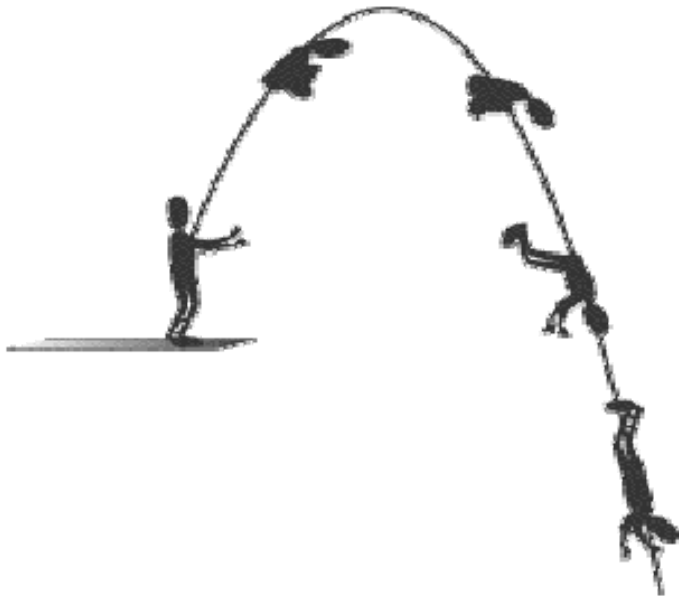
$$M \cdot \frac{L^2}{12} + M \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = M \cdot \frac{L^2}{3}$$

Сохранение момента импульса

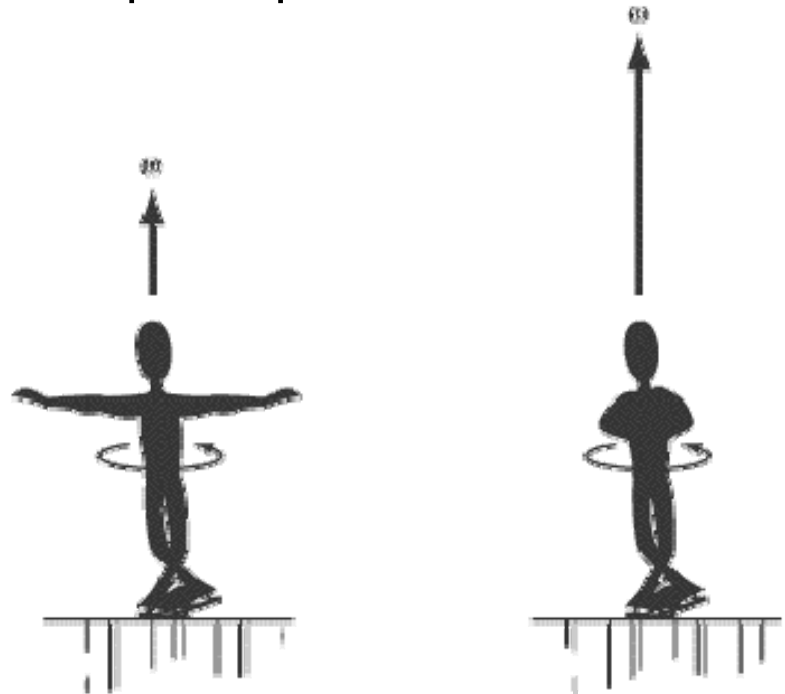
Второй закон Ньютона для вращающейся материальной точки:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = M$$

Если моментом внешних сил можно пренебречь: $L = I\omega = const$



Прыжки в воду



Фигурное катание

Сила Кориолиса

Второй закон Ньютона в **неинерциальной** системе отсчета:

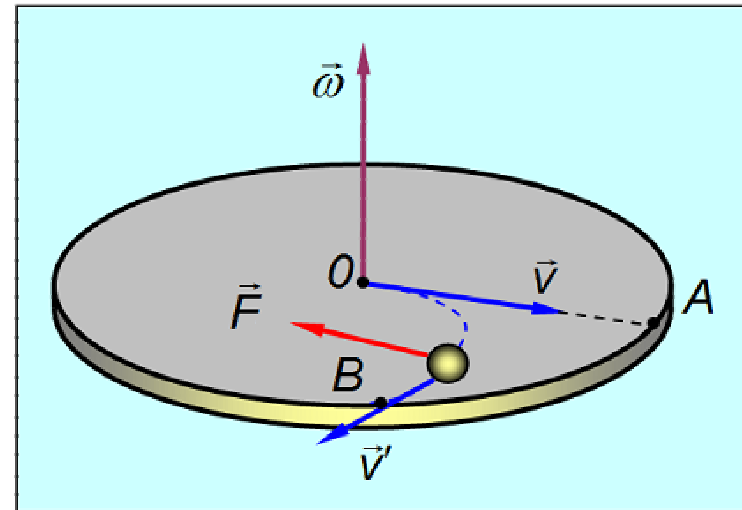
$$m \cdot \vec{a}_{ni} = \vec{F} - m \cdot \vec{a}_{rel}$$

Если объект движется во вращающейся неинерциальной системе:

$$m \cdot \vec{a}_{ni} = \vec{F} - m \cdot \vec{a}_{rel} + \vec{F}_{Cor}$$

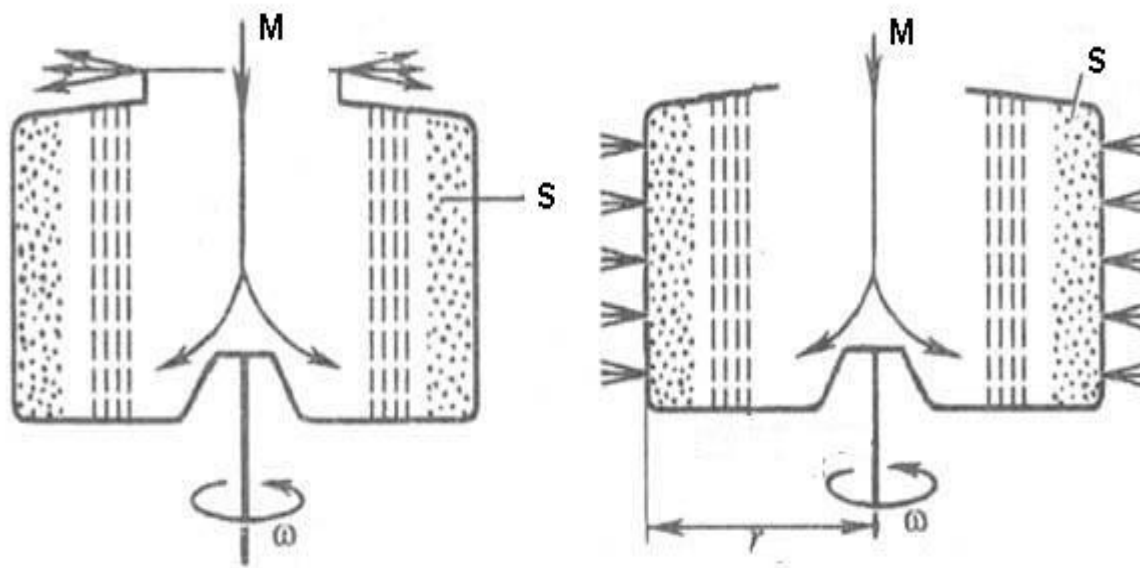
где **сила Кориолиса** - это

$$\vec{F}_{Cor} = -2 \cdot m \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v})$$



Центрифугирование

Центрифугирование – разделение неоднородных жидких или газообразных смесей при вращении:



Кинетическая энергия вращающегося тела и полезные параллели

Кинетическая энергия вращающегося тела – это сумма кинетических энергий всех его частей:

$$E = \sum_i \left(\frac{\Delta m_i \cdot r_i^2 \omega^2}{2} \right) = \frac{\omega^2}{2} \sum_i (\Delta m_i \cdot r_i^2) = \frac{I \cdot \omega^2}{2}$$

Поступательное движение		Вращательное движение	
смещение	$x, [m]$	угол вращения	$\varphi, [rad]$
скорость	$v, [m/s]$	угловая скорость	$\omega, [rad/s]$
ускорение	$a, [m/s^2]$	угловое ускорение	$\alpha, [rad/s^2]$
масса	$M, [kg]$	момент инерции	$I, [kg \cdot m^2]$
сила	$F, [N]$	момент силы	$M, [N \cdot m]$
импульс	$p, [kg \cdot m/s]$?	?