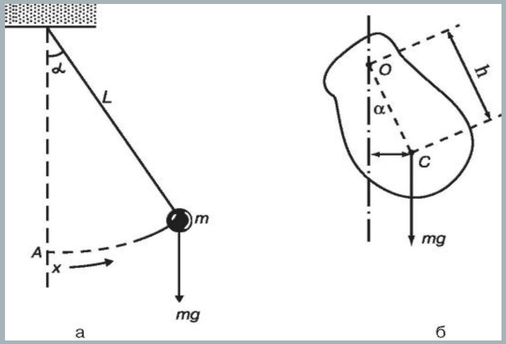
Механические колебания и волны

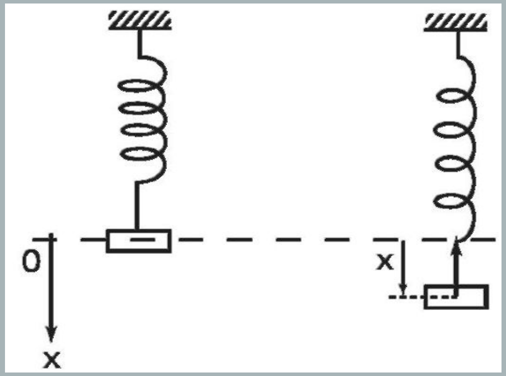
Механические колебания, затухающие и незатухающие колебания. Энергия колебательного движения. Вынужденные колебания, резонанс, сложение колебаний. Сложное колебание и его гармонический спектр.

Механические волны, характеристики волны, волновое уравнение, энергия волны, эффект Доплера. Вектор Умова-Пойнтинга.

Механические колебания

Колебаниями называют процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости. При *периодических колебаниях* характеристики движения повторяются через один и тот же промежуток времени.



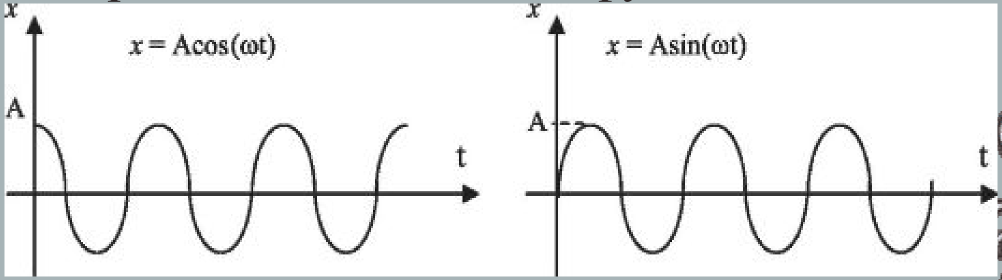


Уравнение свободных колебаний в общем виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{, здесь} \quad \omega_0^2 = k/m$$

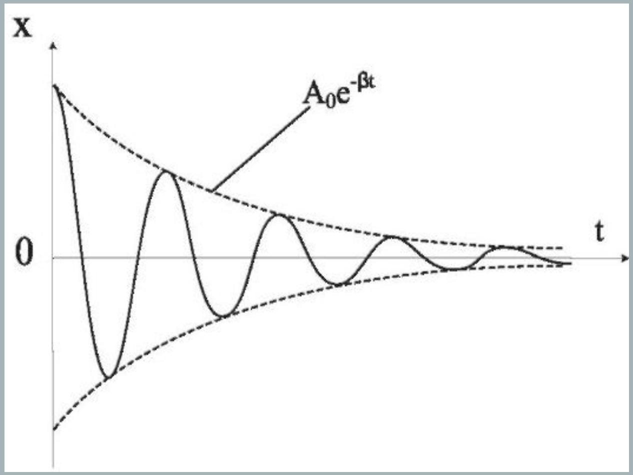
Гармонические колебания – такие, при которых зависимость наблюдаемых величин от времени описывается функциями синуса или косинуса:

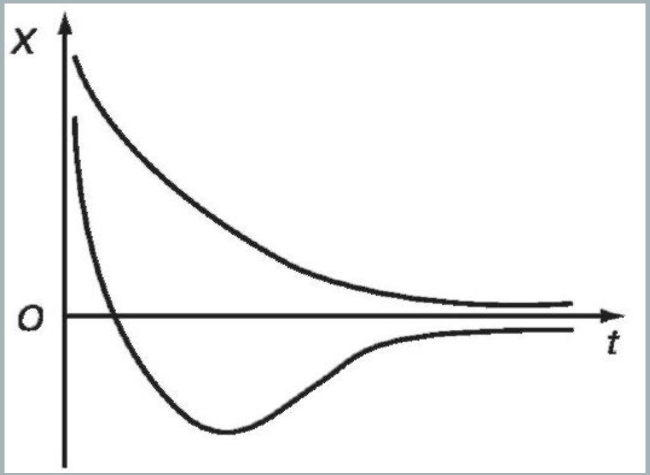
$$x = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$



Затухающие колебания

Затухающие колебания: $x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$, где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$





Декремент затухания:

$$\delta = {A_0 e^{-\beta t}}\Big/{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$$

логарифмический декремент затухания:

$$\lambda = \ln\delta = \beta T$$

Вынужденные колебания. Резонанс.

- *Вынужденные колебания – такие колебания, при которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодической силы (вынуждающей силы):*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_c t = f_0\cos\omega_c t$$

- Решение уравнения вынужденных колебаний:

$$x = A_c\cos(\omega_c t + \varphi)$$, где

$$A_c = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_c^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_c^2}}$$ $$, tg\,\varphi = \frac{2\beta\omega_0}{\omega_0^2 - \omega_C^2}$$

- Резонанс ($\omega_0 - \omega_C$):

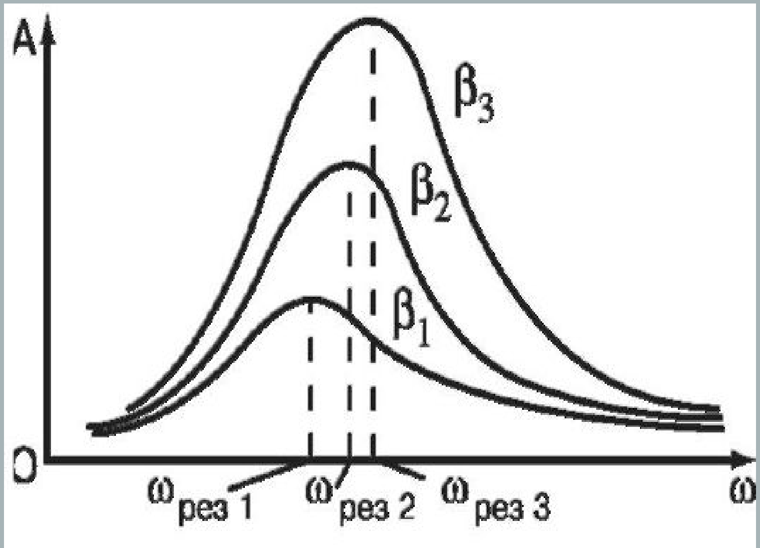
$$A_r = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

$$\omega_c = \omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Вынужденные колебания. Резонанс. (Продолжение)

Условие резонанса в системе без затухания – совпадение собственной и вынужденной частот колебаний. В системе без затухания амплитуда колебаний на резонансной частоте стремится к бесконечности:

$$A_c = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_c^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_c^2}}$$



С ростом частоты вынуждающей силы амплитуда вынужденных колебаний стремится к нулю.

Полезные и вредные проявления резонанса: радиосвязь, лазеры – колебания механических конструкций под действием периодических воздействий, влияние инфразвука на человека.

Сложение колебаний

Допустим, имеются два колебания ***одинаковой частоты и одного направления***:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

Суммируем:

$$x = x_1 + x_2 = \left(A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2\right)\cos\omega t - \left(A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2\right)\sin t$$

Всегда можно ввести произвольные A и φ так, чтобы

$$A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2 = A\cos\varphi \qquad (1)$$

$$A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2 = A\sin\varphi \qquad (2)$$

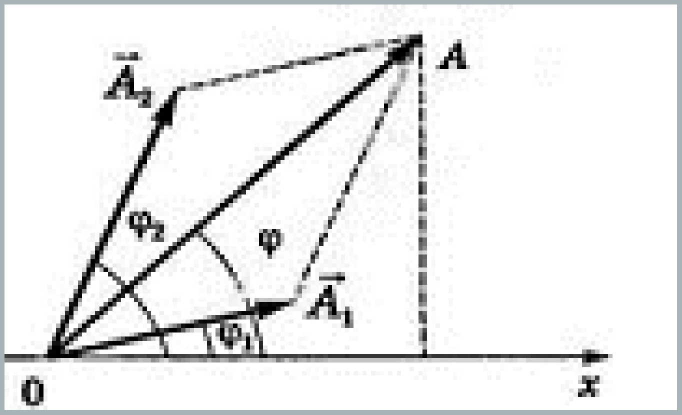
В самом деле

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad (3)$$

$$tg\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} \qquad (4)$$

В результате получаем (правило параллелограмма:

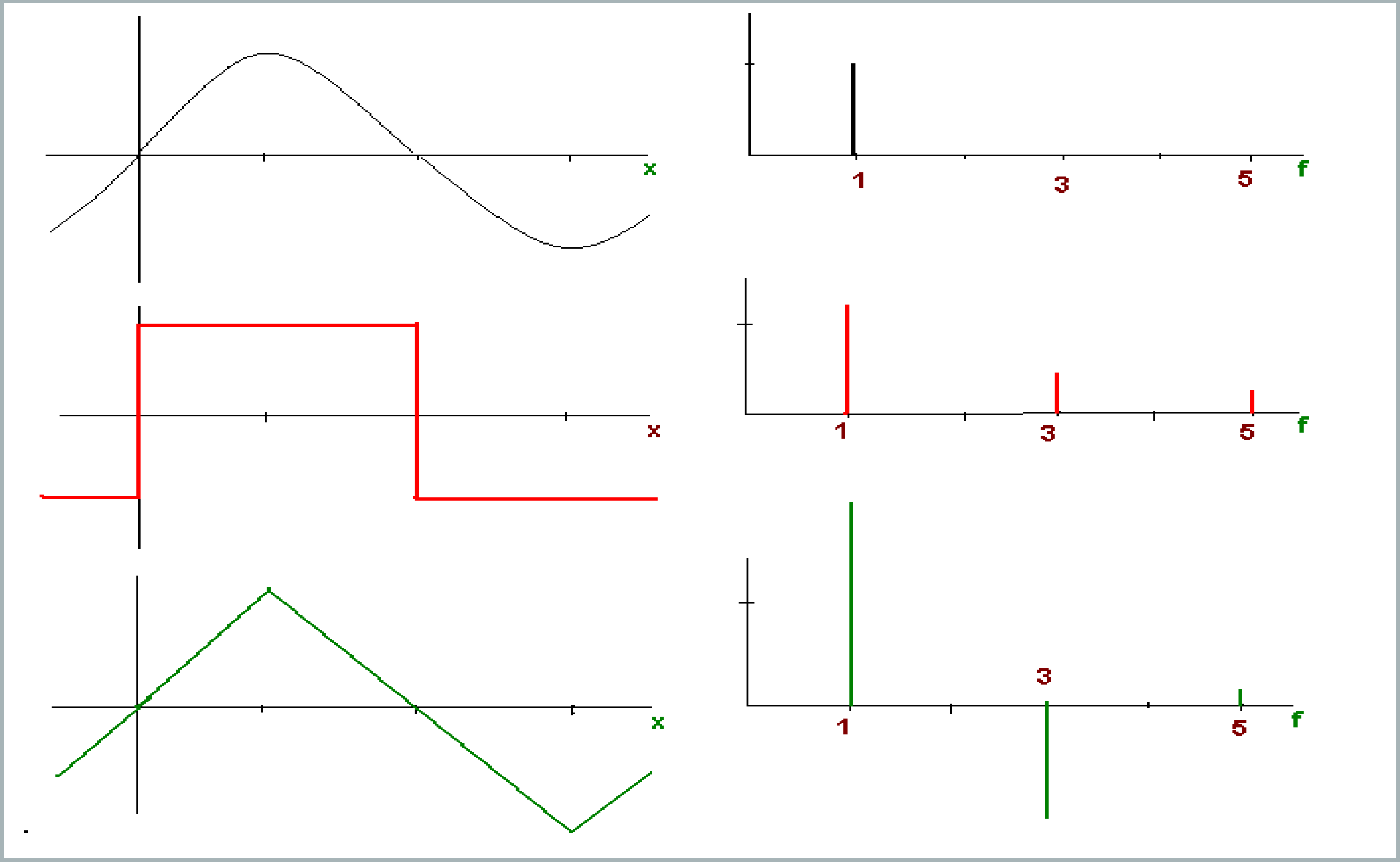
$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$



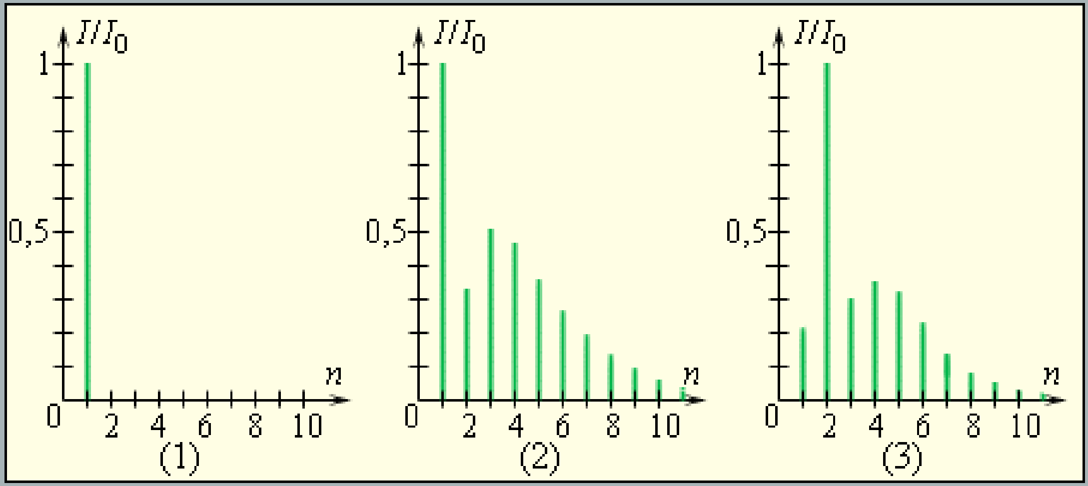
Сложные колебания. Теорема Фурье.

Если функция *F(x)* непрерывна на отрезке $[-\pi,+\pi]$, то для любого *x*, принадлежащего этому отрезку

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{N}b_n\sin nx\right)\to F(x)$$



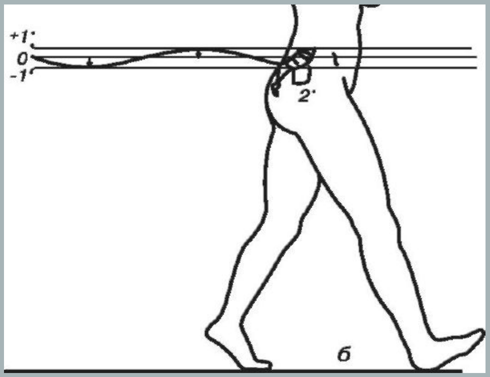
Сложные колебания. Гармонический спектр.



Относительные интенсивности гармоник в спектре ноты “ля” контроктавы, издаваемой камертоном (1), пианино (2), певицей с низким женским голосом (альт, 3). Частота основной гармоники равна 220 Гц.

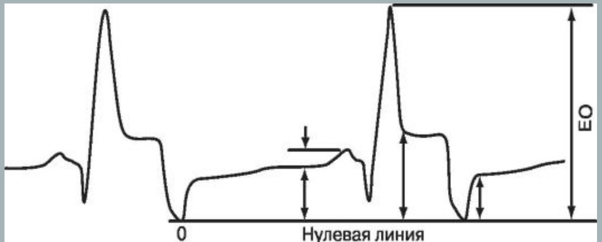
Методы медицинских исследований, основанные на регистрации механических колебаний

Статокинезиметрия – метод оценки способности сохранять вертикальное положение.



Баллистокардиография – регистрация пульсовых микроперемещений тела при выбрасывании крови из сердца в сосуды.

Апекскардиография – регистрация низкочастотных колебаний грудной клетки при работе сердца.



Энергия колебательного движения.

- *Полная энергия гармонических колебаний* складывается из двух слагаемых: кинетической и потенциальной энергии.
- *Кинетическая энергия гармонических колебаний:*

$$E_k(t) = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{m\omega_0^2 A_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)}{2}$$

- *Потенциальная энергия:*

$$E_p(t) = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)}{2}$$

- *Полная энергия:*

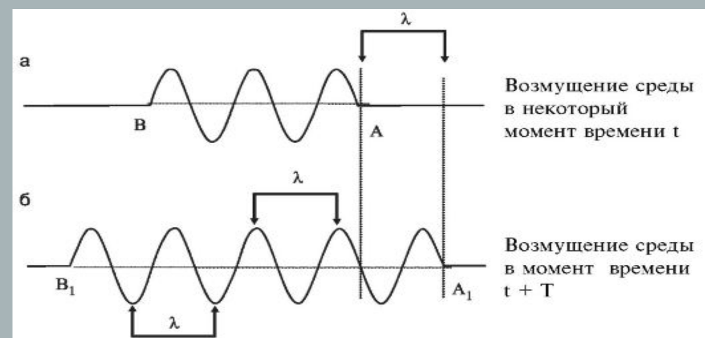
$$E_t = E_k + E_p = \frac{kA_0^2}{2} = \frac{mA_0^2\omega_0^2}{2}$$

Воздействие вибраций на человека

Механические волны, характеристики волн

Волна – процесс распространения колебаний любой природы (упругих, электромагнитных, колебаний на поверхности жидкости, колебания атомов и молекул). **Фронт волны** – геометрическое место точек, до которых к данному моменту времени дошло возмущение среды. **Фазовая скорость** волны – скорость распространения ее фронта (но не скорость движения частиц среды !). **Частота волны. Длина волны** – расстояние, на которое перемещается ее фронт за время, равное периоду колебаний:

$$\lambda = vT = \frac{v}{f} = \frac{2\pi v}{\omega}$$



Волновое уравнение (линейно!):

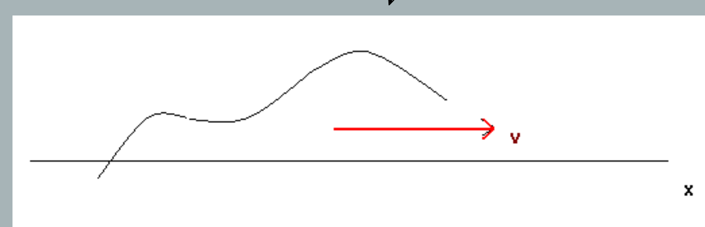
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

гармоническое решение:

$$u = u_0 \cos(\omega t - \omega \frac{x}{v}) = u_0 \cos(\omega t - kx)$$

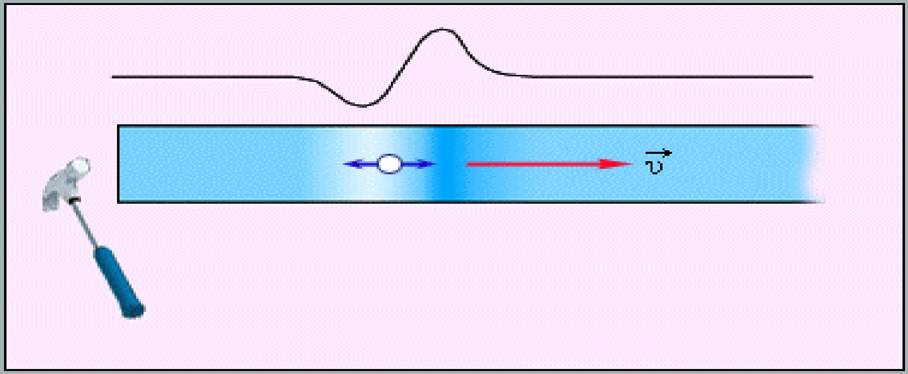
Решение д'Аламбера:

$$u = f(x - vt) + g(x + vt)$$

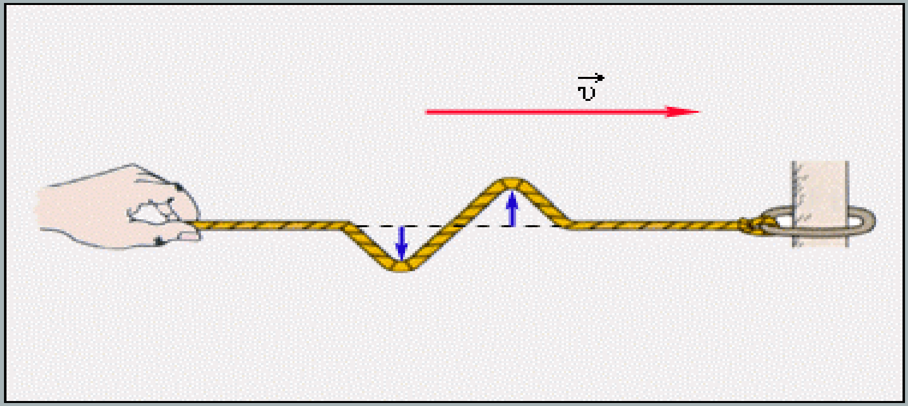


Поляризация волн

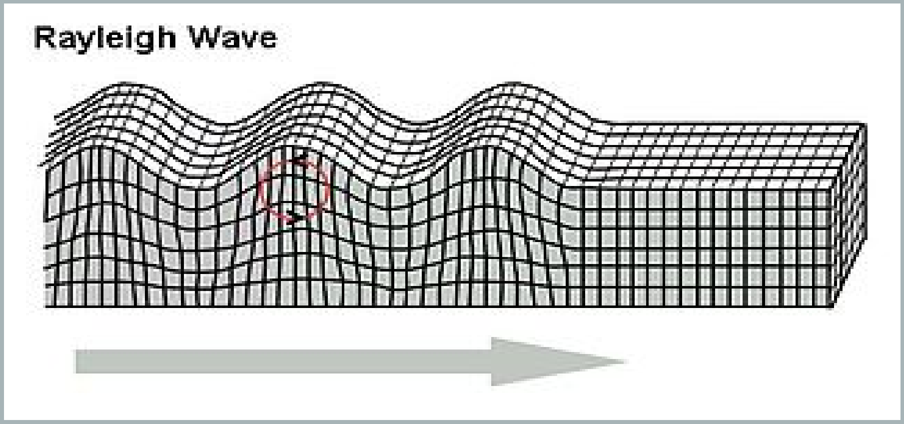
Продольная волна:



Поперечная волна:



Поверхностная волна:



Энергетические характеристики механической волны. Вектор Умова-Пойнтинга.

Объемная плотность энергии – энергия колебательного движения частиц среды, содержащихся в единице ее объема:

$$w = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2}, [w] = \frac{Joule}{m^3}$$

При распространении волны энергия, сообщаемая источником, переносится во все более удаленные области. *Поток энергии* – энергия, переносимая волной в единицу времени:

$$\Phi = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\int w dV, [\Phi] = Watt$$

Интенсивность волны (или *плотность потока энергии, ею переносимой*) – величина, равная потоку энергии, переносимой волной через площадку единичной площади, перпендикулярную направлению распространения волны:

$$\vec{I} = \frac{d\Phi}{dS} = w\vec{v} = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2}\vec{v}, [I] = \frac{Watt}{m^2}$$

Эффект Доплера

Эффект Доплера – изменение частоты колебаний, воспринимаемое приемником (наблюдателем) вследствие относительного движения источника колебаний и приемника.

$$f = f_0 \frac{v \pm u_и}{v \mp u_п}$$

Применение в медицине

$$f = \pm 2 f_0 \frac{u}{v}$$

Реальные волновые процессы – нелинейные!

Уравнение Кортевега-де Вриза (одно из нелинейных волновых уравнений):

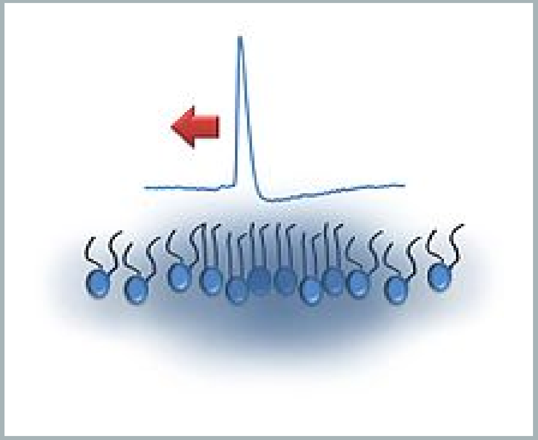
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Решение - *солитон* (уединенная волна), его амплитуда пропорциональна скорости распространения:

$$u = \frac{3v}{sh^2\left[\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right]}$$

где гиперболический синус – это функция:

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



Солитоны в медицине и биологии.