**ЛЕКЦИЯ № 2**

**ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ**

КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ.

1

Простейшей формой движения материи является механическое движение. Оно представляет собой изменение положения тела или его отдельных частей в пространстве, т.е. относительно друг друга. Основная задача механики состоит в ответе на вопрос: где будет находиться тело в интересующий нас момент времени.

Любое движение в механике может быть представлена как комбинация двух основных видов движения: поступательного и вращательного.

Рассмотрим наиболее простой случай вращательного движения: вращение абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси.

Тело называется абсолютно твердым, если расстояние между его любыми двумя точками неизменно. Понятно, что это понятие является физической абстракцией. Реально этому условию удовлетворяют тела, деформациями которых при решении тех или иных задач можно пренебречь.

При вращении разные точки твёрдого тела движутся по окружностям, центры которых образуют прямую. Эта прямая и называется осью вращения. Легко заметить, что угловые перемещения всех точек за один и тот же промежуток времени Δt будут при этом одинаковыми. По этой причине положение вращающегося тела целесообразно определять углом, на который оно поворачивается относительно своего начального положения. Уравнением вращательного движения в этом случае будет функция ϕ = f(t), которая будет иметь один и тот же вид для всех точек тела. Получим выражение этой функции в общем виде. Для этого достаточно рассмотреть движение одной из точек тела вокруг оси.

**** Пусть твердое тело вращается вокруг оси . Траектория движения точки М будет представлять собой окружность, плоскость которой перпендикулярна , а центр 0 лежит на этой прямой. Положение произвольной точки М на траекто-рии будем определять углом ϕ, который образует радиус-вектор , проведенный из центра окружности к точке М, с лучом 0*х*, лежащим в плоскости траектории и выбранным за начало отсчета.

В СИ измерение угла ϕ производится в радианах. Угол в 1 радиан – это центральный угол, который опирается на дугу длинной равной радиусу окружности r. Т.е., чтобы определить угол в радианах надо длину дуги разделить на её радиус кривизны:

 (1)

Рассмотрим основные кинематические параметры вращательного движения. Пусть за бесконечно малый промежуток времени dt материальная точка из положения М переместится в положение , пройдя путь ds. При этом радиус-вектор  повернётся на бесконечно малый угол dϕ.

***Угловая скорость ω – это вектор численно равный углу поворота радиус-вектора  за единицу времени и направленный так, что с его острия движение точки совершается против часовой стрелки.*** Начало  находится в точке О.

. . (2)

Время, за которое тело совершает один полный оборот, называется периодом вращения (Т). Т.к. угол поворота, соответствующий одному полному обороту Δϕ = 2π рад, то при равномерном движении

. (3)

Величину равную числу оборотов тела за единицу времени называют частотой вращения n:

; . (4)

Уравнение равномерного вращательного движения (ω = const) получим, решив дифференциальное уравнение (2):

. (5)

При неравномерном вращении быстрота изменения угловой скорости характеризуется угловым ускорением β:

. . (6)

 – это вектор, расположенный на оси вращения и направленный, так как и , если скорость растет, и в противоположном направлении, если скорость уменьшается.

В общем случае, уравнение равноускоренно вращательного движения (β = const) можно получить, решив дифференциальное урав-

нение (6) относительно ϕ:

ω = ω0 + βt, (7)

 (8).

Для описания движения по круговой траектории можно использовать и уже знакомые нам линейные кинематические параметры. Например, скорость движения точки по траектории:

****

. . (9)

Эта скорость при переходе из одной точки траектории (М) в другую () будет меняться в общем случае как по величине, так и по направлению (рис.2):

 (10)

Разложим вектор  на две составляющие:– направленную вдоль  и – проведенную так, что . Из чертежа видно, что dυτ –равна приращению модуля скорости , а  определяет изменение направления вектора скорости  при переходе точки тела из положения М в .

 (11).

Разделив (11) на dt, получим:

 (12)

Так как  – это полное линейное ускорение , то (12) перепишется

, (13) где  – тангенциальное ускорение, которое характеризует быстроту изменения скорости по величине (по модулю); dυn/dt = an – нормальное ускорение, которое определяет „быстроту” изменения направления скорости.

Установим взаимосвязь линейных и угловых параметров движения по окружности. Из соотношения (1)

s = ϕ ⋅ r. (14)

Продифференцировав правую и левую часть по t, имеем:

, т.е. υ = ω⋅r . (15)

Эта формула определяет взаимосвязь модуля линейной скорости υ и модуля угловой скорости β. Дифференцируем (15) еще раз по t, получим для тангенциального ускорения:

, аτ = r⋅β. (16)

Из треугольника  при радианной мере малых углов:

dυn = υ·sindϕ = υ·dϕ. Но , тогда .

Дифференцируя по t правую и левую часть последнего равенства, получим:

 отсюда . (17)

Учитывая (15), из (17) получим:

an = ω2r (18)

Из Δ АВС (dυ)2 = (dυτ)2 +(dυn)2  или после деления на (dt)2  – . С учетом (16) и (18)

. (19)

**ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ**

 Установим взаимосвязь между кинематическими и динамическими параметрами вращательного движения. Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси ZZ′. Т.к. все точки тела движутся по окружностям, плоскость которых перпендикулярна оси вращения, то это означает, что равнодействующие сил приложенных к каждой точке лежат в плоскости траекторий. Разложим равнодействующую сил , приложенную к элементу массы Δ*m*i на две составляющие:– вдоль радиуса  и – касательную к троектории. Нормальная составляющая сил , линия действия которой лежит в плоскости траектории, проходит через ZZ′ и обеспечивает центростремительное ускорение элемента массы Δ*m*iи не влияет на величину углового ускорения. Составляющая  вызывает тангенциальное ускорение . По второму закону Ньютона

. (20)

С учетом (16)

Fi,τ=Δmiri⋅β. (21)

Умножив (21) на ri, получим:

, (22)

, (23)

где  – момент силы  относительно оси ZZ′.

***Моментом силы называется вектор, модуль которого равен произведению модуля силы на длину плеча. Направление вектора***  ***перпендикулярно к плоскости, в которой лежит вектор силы, и определяется по правилу буравчика.***

***Плечом силы называется кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы.***

***Скалярная величина  называется момент инерции материальной точки относительно оси*** ***вращения*** ZZ′***.***

Просуммируем (23) по всем элементам массы тела: . Получим:

 или в векторном виде  (24)

Здесь - результирующий момент силы, действующий на тело;  - момент инерции тела.

Равенство (24) называется основным уравнением динамики вращательного движения. Т.к. скалярная величина J всегда положительная, то векторные величины  и  всегда направлены в одну сторону вдоль оси вращения тела.

Основное уравнение динамики вращательного движения по форме сходно с математическим выражением второго закона Ньютона :

 ↔ 

Из сопоставления вытекает, что при вращательном движении роль силы играет момент силы (вращательный момент), а инертные свойства тела выражаются моментом инерции тела – J.

**МОМЕНТ ИМПУЛЬСА. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА**

Моментом импульса материальной точки относительно оси вращения называют векторную величину, модуль которой

.  (25)

Тогда момент импульса абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси вращения

 или в векторной форме , (26)

т.е.  лежит на оси вращения и совпадает по направлению с  (на-

правление  определяется так же как и для  – по правилу буравчика).

Запишем для нашего тела основное уравнение динамики вращательного движения в виде:

 (27)

Если М = 0, то dL/dt = 0 т.е.

L = Jω = const. (28)

***Момент импульса тела остается неизменным, если суммарный момент всех внешних сил действующих на тело равен нулю – это закон сохранения момента импульса.***

Для системы из N тел, которые вращаются вокруг общей оси, закон сохранения импульса записывается в виде:

. (29)

**МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТВЁРДЫХ ТЕЛ РАЗНОЙ ФОРМЫ**

**ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА**

Из определения момента инерции тел в общем виде:

 (30)

следует, что эта величина является аддитивной. Это означает, что моменты инерции тел в некоторых случаях можно найти интегрированием исходя из геометрических соображений.

 В качестве примера найдём момент инерции J тонкого стержня длиной *l*, массой m и диаметром d << *l* относительно оси  проходящей через его центр масс перпендикулярно к стержню (Рис. 4). Выделим на расстоянии *х* от оси вращения элемент стержня бесконечно малой толщины d*x*.

Масса этого элемента dm = ρ⋅S⋅d*x*, где ρ – плотность материала, S – площадь поперечного сечения. Момент инерции элемента массы dm:

 () Учитывая, что элементы массы dm попарно симметричны относитель-

но оси вращения 00', проинтегрируем левую часть () в пределах от 0 до J, а правую в пределах от 0 до *l*/2. Получим:

 ()

Т.к.  – масса стержня, то окончательно для тонкого стержня

 (33)

 Определим момент инерции диск или цилиндра радиусом R, высотой h и массой m относительно его геометрической оси, параллельной образующей. Выделим цилиндрический слой бесконечно малой толщины dr и радиусом r. Очевидно, что все элементы этого слоя будут иметь одинаковые моменты инерции. Это, значит, что момент инерции слоя

.

Т.к. r изменяется в пределах от r = 0 до r = R, то интегрируя получим:



но , 

 (36)

Без выводов запишем:

а) шар радиусом R и массой m, относительно оси, проходящей через его центр –  (31)

б) полый тонкостенный цилиндр радиусом R и массой m, относительно его геометрической оси, параллельной образующей –

 (32)

Согласно теореме Штейнера момент инерции тела – J относительно любой оси, параллельной оси проходящей через центр масс этого тела –

, (33)

где J0 – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, d – расстояние между осями. Например, если ось вращения проходит через конец стержня,

****

то  (34)

В качестве примера Определим момент инерции J тонкого стержня длиной *l*, массой m и диаметром d<<*l*. Относительно оси  к перпендикулярной

а) тонкий однородный стержень.

 к стержню и проходящей через его центр масс.

Выделим на расстоянии *х* от оси вращения элемент стержня бесконечно малой толщины d*x*.

Масса этого элемента dm = ρ⋅S⋅d*x*, где ρ-плотность материала,

S-площадь поперечного сечения. Момент инерции элемента массы dm



Интегрируем левую и правую части в пределах от 0 до J и правую от 0 до *l*/2. Учитывая, что элементы попарно симметричны, получим:



Т.к. , то окончательно  (33)

б) диск или цилиндр радиусом R, высотой h и массой m.

Определим момент инерции цилиндра относительно его геометрической оси, параллельной образующей.

 Выделим цилиндрический слой бесконечно малой толщины dr и радиусом r. Очевидно, что все элементы этого слоя будут иметь одинаковые моменты инерции. Это, значит, что момент инерции слоя

.

Т.к. r изменяется в пределах от r = 0 до r = R, то интегрируя получим:



но , 

 (36)

Без выводов запишем:

а) тонкий однородный стержень –

 (31)

б) диск или цилиндр радиусом R, высотой h и массой m -

 (32)

Согласно теореме Штейнера момент инерции тела - J относительно любой оси, параллельной оси проходящей через центр масс этого тела

, (33)

где J0 – момент инерции тела относительно оси через центр масс, d - расстояние между осями. Например, если ось вращения проходит через конец стержня,

****

то  (34)

В качестве примера найдём момент инерции J тонкого стержня длиной *l*, массой m и диаметром d<<*l*. Относительно оси  к перпендикулярной

а) тонкий однородный стержень.

 к стержню и проходящей через его центр масс.

Выделим на расстоянии *х* от оси вращения элемент стержня бесконечно малой толщины d*x*.

Масса этого элемента dm = ρ⋅S⋅d*x*, где ρ-плотность материала,

S-площадь поперечного сечения. Момент инерции элемента массы dm



Интегрируем левую и правую части в пределах от 0 до J и правую от 0 до *l*/2. Учитывая, что элементы попарно симметричны, получим:



Т.к. , то окончательно  (33)

б) диск или цилиндр радиусом R, высотой h и массой m.

Определим момент инерции цилиндра относительно его геометрической оси, параллельной образующей.

Выделим цилиндрический слой бесконечно малой толщины dr и радиусом r. Очевидно, что все элементы этого слоя будут иметь одинаковые моменты инерции. Это, значит, что момент инерции слоя

.

Т.к. r изменяется в пределах от r = 0 до r = R, то интегрируя получим:



но , 

 (36)

Без выводов запишем:

а) тонкий однородный стержень –

 (31)

б) диск или цилиндр радиусом R, высотой h и массой m -

 (32)

Согласно теореме Штейнера момент инерции тела - J относительно любой оси, параллельной оси проходящей через центр масс этого тела

, (33)

где J0 – момент инерции тела относительно оси через центр масс, d - расстояние между осями. Например, если ось вращения проходит через конец стержня,

****

то  (34)

Без выводов запишем:

а) тонкий однородный стержень – **ДОПОЛНИТЬ ВЫВОДОМ**

 (31)

б) диск или цилиндр радиусом R, высотой h и массой m -

 (32)

Согласно теореме Штейнера ***момент инерции тела - J относительно любой оси, параллельной оси проходящей через центр масс этого тела***

**,** (33)

****где J0 – момент инерции тела относительно оси через центр масс, d - расстояние между осями. Например, для стержня, если ось вращения проходит через его конец (рис.1):

 (34)

**РАБОТА И ЭНЕРГИЯ ПРИ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИИ**

 Пусть под действием силы , приложенной в точке В, тело повернулось на угол dϕ. Определим элементарную работу этой силы. Разложим силу  на нормальную и тангенциальную составляющие. Очевидно, что  работы не производит, т.к. перпендикулярна перемещению тела. Тогда

. (35)

Работа при повороте тела из положения определяющегося углом  в положение  будет

. (36)

Кинетическую энергию вращающегося тела можно представить как сумму кинетических энергий бесконечно малых элементов этого тела с массой Δm и скоростью υ1.

. (37)

Подставим  и  в (35)

. (38)