ОСНОВЫ ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА. ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Проведено исследование влияния трех уровней фактора *A* на 4 испытуемых. Методом дисперсионного анализа при уровне значимости $p = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу о влиянии фактора *A* на результативный признак. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями.

Номер испытания	**Уровни фактора *A***		
	A_1	**A_2**	**A_3**
1	126	129	130
2	125	133	131
3	127	127	136
4	123	126	129
$\overline{x_j}$	**125,3**	**128,8**	**131,5**

Решение:

Пусть число проведенных наблюдений при действии каждого из уровней фактора *A* одинаково и равно q =4. Все значения величины *X*, наблюдаемые при каждом фиксированном уровне фактора A_j, составляют группу, и в последней строке таблицы представим соответствующие выборочные групповые средние, вычисленные по формуле:

$$\overline{x_j} = \sum_{i=1}^{q} \frac{x_{ij}}{q}.$$

Для упрощения расчетов будем использовать не экспериментальные значения x_{ij} величины *X*, а значения $y_{ij} = x_{ij} - C$, где постоянная *C* представляет собой произвольное число, близкое к среднему значению $\bar{x}$ всех результатов наблюдений x_{ij}, таким образом:

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{l} \frac{\overline{x_j}}{l} = \frac{125{,}3 + 128{,}8 + 131{,}5}{3} = 128{,}5,$$

где l - количество уровней фактора *A* (l=3).

Введем новые переменные:

$$y_{ij} = x_{ij} - C = x_{ij} - \bar{x} = x_{ij} - 128{,}5$$

Преобразуем таблицу с дальнейшим использованием ее в качестве расчетной.

Номер испытания	**Уровни фактора А , A_j**	**Итог**

i	A_1		A_2		A_3		
	y_{i1}	y_{i1}^2	y_{i2}	y_{i2}^2	y_{i3}	y_{i3}^2	
1	-2,5	6,3	0,5	0,3	1,5	2,3	
2	-3,5	12,3	4,5	20,3	2,5	6,3	
3	-1,5	2,3	-1,5	2,3	7,5	56,3	
4	-5,5	30,3	-2,5	6,3	0,5	0,3	
$P_i = \sum_{i=1}^{q} y_{ij}^2$		51		29		65	145
$R_i = \sum_{i=1}^{q} y_{ij}$	-13		1		12		0
R_j^2	169		1		144		314

С помощью таблицы определим вспомогательные величины:

$$P_i = \sum_{i=1}^{q} y_{ij}^2; \qquad R_i = \sum_{i=1}^{q} y_{ij}$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{4} y_{i1}^2 = (-2{,}5)^2 + (-3{,}5)^2 + (-1{,}5)^2 + (-5{,}5)^2 = 51;$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{4} y_{i2}^2 = (0{,}5)^2 + (4{,}5)^2 + (-1{,}5)^2 + (-2{,}5)^2 = 29;$$

$$P_3 = \sum_{i=1}^{4} y_{i3}^2 = (1{,}5)^2 + (2{,}5)^2 + (7{,}5)^2 + (0{,}5)^2 = 65;$$

$$R_1 = \sum_{i=1}^{4} y_{i1} = (-2{,}5) + (-3{,}5) + (-1{,}5) + (-5{,}5) = -13;$$

$$R_2 = \sum_{i=1}^{4} y_{i2} = 0{,}5 + 4{,}5 + (-1{,}5) + (-2{,}5) = 1;$$

$$R_3 = \sum_{i=1}^{4} y_{i3} = 1{,}5 + 2{,}5 + 7{,}5 + 0{,}5 = 12.$$

Рассчитаем значения факторной и остаточной дисперсии:

$$S_{\phi}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{l} \frac{R_j^2}{q} - \frac{1}{lq}\left(\sum_{j=1}^{l} R_i\right)^2}{l-1},$$

$$S_{ост}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{l} P_j - \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{l} R_j^2}{l(q-1)},$$

таким образом, получим:

$$S_{\phi}^2 = \frac{\frac{1}{4}\cdot\left[(-13)^2 + 1^2 + 12^2\right] - \frac{1}{4\cdot 3}\left[-13+1+12\right]^2}{3-1} = 39{,}25,$$

$$S_{ост}^2 = \frac{(51+29+65) - \frac{1}{4}\cdot\left[(-13)^2 + 1^2 + 12^2\right]}{3(4-1)} = 7{,}4.$$

По методу Фишера - Снедекора проверим значимость различия дисперсий. Вычислим экспериментальное значение критерия:

$$F_{эксп} = \frac{S_{ф}^2}{S_{ост}^2} = \frac{39{,}25}{7{,}4} = 5{,}3.$$

По таблице критических значений распределений Фишера - Снедекора при уровне значимости p = 0,05, определим критическое значение $F_{кр}(p, f_1, f_2)$. Здесь $f_1 = l - 1 = 3 - 1 = 2$ – число степеней свободы факторное, $f_2 = l(q-1) = 3(4-1) = 9$ – число степеней свободы остаточное. Таким образом:

$$F_{кр}(p, f_1, f_2) = F_{кр}(0{,}05;2;9) = 4{,}26$$

Так как $F_{эксп} > F_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается в пользу конкурирующей, т.е. групповые средние различаются значимо. Внешнее воздействие надо признать эффективным.